باب 7

5260CH07

تکملہ
(INTEGRALS)

❖ جس طرح پہاڑوں پر چڑھنے کے ماہر پہاڑوں پر چڑھتے ہیں۔ کیونکہ یہ موجود ہیں، اسی طرح ایک اچھا ریاضی کا طالب علم نئی اشیا کا مطالعہ کرتا ہے کیونکہ یہ موجود ہے۔**جیمس بی برسٹل** ❖

7.1 تعارف (Introduction)


جی۔ڈبلیو۔لیبنٹز (G .W. Leibnitz)
(1646-1716)

تفرق احصا (Calculus) مشتق کے تصور پر مبنی ہے۔مماس خطوط کو فنکشن کے گراف پر بیان کرنا اور اس طرح کے خطوط کے سلوپ کا حساب لگانا ہی مشتق کی اصل ہمت افزائی تھی۔تکملہ احصا کے تفاعل کے گراف سے گھرے ہوئے رقبہ کا حساب لگانے اور مسئلہ کو بیان کرنے سے بہت ہمت افزائی ہوئی۔

اگر ایک تفاعل 'f' ایک دفعہ I میں تفرق پذیر ہے۔یعنی،اس کا مشتق f' I کے ہر نقطہ پر وجود میں،تب ایک قدرتی سوال اٹھتا ہے کہ I کے ہر نقطہ پر f' دیا ہوا ہے،کیا ہم فنکشن دریافت کر سکتے ہیں؟ وہ تفال جو تفاعل کے طور پر دیا جا سکتا تھا۔مشتق کے طور پر مشتق کے برخلاف کہلاتے ہیں۔(یا ابتدائی) تفاعل کے۔اس کے آگے، جو فامولہ یہ تمام برخلاف مشتق دیتا ہے وہ فنکشن کا غیر معین تکملہ کہلاتا ہے اور اس عمل کو جو ضد مشتق کو معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے تکمل (Integration) کہتے ہیں۔ اس طرح کے مسئلے بہت سے عملی حالات میں پیدا ہوتے ہیں۔ایک لمحہ کے لیے مان لیجیے،اگر ہم ایک شے کی فوری رفتار اچانک جانتے ہیں،تب ایک قدرتی سوال پیدا ہوتا ہے،یعنی، کیا ہم ایک شے کی پوزیشن کا اندازہ کسی حالت میں کر سکتے ہیں؟ اس طرح کے بہت سے عملی اور نظری حالات ہیں جہاں تکمل کا طریقہ ملوث ہے۔تکملہ کا بڑھنا ذیل طریقے کے مسئلوں کو حل کرنے کی کوشش سے آتا ہے۔

(a) ایک فنکشن کو معلوم کرنا جب کہ اس کا مشتق دیا ہوا ہے۔

(b) ایک فنکشن کے رقبہ کو معلوم کرنا جس میں وہ کچھ حالات کے تحت گراف سے گھرا ہوا ہے۔

یہ دو مسئلے ہمیں تکملہ کی دو اشکال کی طرف لے جاتے ہیں، مثلاً غیر معین اور معین تکملہ، جو ایک ساتھ مل کر تکملہ احصا بناتے ہیں۔ غیر معین اور معین تکملہ کے بیچ ایک رشتہ ہے جس کو احصا کا بنیادی مسئلہ (Fundamental Theorem of calculus) کہتے ہیں، اور جو معین تکملہ کو سائنس اور انجینئرنگ کے لیے ایک عملی اوزار بنا دیتا ہے۔ معین تکملہ اور بہت سے دلچسپ مسئلے جو کہ مختلف شعبوں سے تعلق رکھتے ہیں جیسے معاشی (economic) مالیاتی (finance) اور احتمال (probability) میں استعمال کیا جاتا ہے۔

اس باب میں ہم اپنے مطالعہ کو غیر معین تکملہ اور معین تکملہ تک محدود رکھیں گے اور ان کی بنیادی خصوصیات اور کچھ تکمل کی تکنیک بھی اس میں شامل ہوں گی۔

7.2 تکمل تفرق کے معکوس عمل کے طور پر
(Integration as an Inverse Process of Differentiation)

تکمل، تفرق کا معکوس عمل ہے۔ ایک تفاعل کا تفرق کرنے کے بجائے، ہمیں ایک تفاعل کا مشتق دیا ہوا ہے اور اس کا ابتدائی معلوم کرنے کے لیے کیا گیا ہے، یعنی اصل فنکشن۔ اس طرح کے عمل کو تکمل (Integration) یا ضد تفرق کہا جاتا ہے۔

ہم ذیل مثالوں پر غور کرتے ہیں:

ہم جانتے ہیں کہ
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad \text{............(1)}$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 \quad \text{............(2)}$$
اور
$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad \text{............(3)}$$

ہم (1) میں مشاہدہ کرتے ہیں، تفاعل $\cos x$، $\sin x$ کا معرف (مشتق) تفاعل ہے ہم کہتے ہیں کہ $\cos x$، $\sin x$ کا ضد مشتق (یا ایک تکملہ) ہے۔ اسی طرح (2) اور (3) میں بالترتیب $\frac{x^3}{3}$ اور e^x، x^2 اور e^x ضد مشتق (یا تکملہ) ہیں۔

دوبارہ، ہم یہ نوٹ کرتے ہیں کہ کسی بھی حقیقی عدد C کے لیے، جس کا برتاؤ ایک مستقل تفاعل کے طور پر کیا جاتا ہے، اس کا مشتق صفر ہے، اور اس لیے ہم (1)، (2) اور (3) کو ذیل طریقے سے لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{d}{dx}(e^x + C) = e^x \text{ اور } \frac{d}{dx}(\frac{x^3}{3} + C) = x^2 \text{ ، } \frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x$$

اس طرح، مندرجہ بالا تفاعل کے ضد مشتق (یا تکملہ) واحد نہیں ہیں۔ درحقیقت، ان میں سے ہر ایک تفاعل کے لاتعداد ضد۔ مشتق وجود میں ہیں جو حقیقی اعداد کے سیٹ میں سے اختیاری، C(arbitary) چنے سے ملتے ہیں۔ اسی وجہ سے C کو ایک اختیاری مستقلہ (arbitary constant) بنایا گیا ہے۔ اصلیت میں، C ایک پیرامیٹر ہے جو کہ دیے ہوئے فنکشن کے مختلف مخالف مشتق (یا تکملہ) سے حاصل ہوتا ہے۔ زیادہ عام طور پر، اگر ایک فنکشن F ہے تا کہ $\frac{d}{dx}\text{F}(x) = f(x)$، تمام $\forall\ x \in \text{I}$ کے لیے، تب کسی بھی اختیاری حقیقی عدد C کے لیے (جسے تکملہ کا مستقلہ بھی کہا جاتا ہے)

$$\frac{d}{dx}[\text{F}(x) + \text{C}] = f(x),\ x \in \text{I}$$

اس طرح $\{\text{F} + \text{C},\ \text{C} \in \mathbf{R}\}$، f کے ضد مشتق کے خاندان کو ظاہر کرتا ہے۔

ریمارک: یکساں مشتق کے ساتھ تفاعل ایک مستقلہ سے علاحدہ ہوتے ہیں۔ اسے دکھانے کے لیے تفاعل g اور h ایک وقفہ I پر یکساں مشتق رکھتے ہیں۔

فنکشن $f = g - h$ پر غور کیجیے جو کہ $f(x) = g(x) - h(x),\ \forall x \in \text{I}$ سے بیان کیا گیا ہے۔

تب $\frac{df}{dx} = f' = g' - h'$ جو دیتا ہے تب $f'(x) = g'(x) - h'(x)\ \forall\ x \in \text{I}$

یا $f'(x) = 0,\ \forall x \in \text{I}$ تصور سے

یعنی، f کی شرح تبدیلی x کو مدنظر رکھتے ہوئے صفر ہے، وقفہ I پر اور اس لیے f مستقل ہے۔

مندرجہ بالا ریمارک (تبصرہ) کی بنا پر، یہ اس بات کی دلالت کرتی ہے کہ $\{\text{F} + \text{C},\ \text{C} \in \text{R}\}$ خاندان f کے تمام ممکن ضد مشتق فراہم کرتا ہے۔

ہم ایک نئی علامت (Symbol) سے روشناس کراتے ہیں، جس کا نام ہے $\int f(x)\,dx$ جو ضد مشتق کی مکمل کلاس کو ظاہر کرتی ہے۔ اور جسے x کی مناسبت سے f کا غیر معین تکملہ کہتے ہیں۔

علامتی طور پر، ہم لکھتے ہیں

$$\int f(x)\,dx = \text{F}(x) + \text{C}$$

ترقیم (Notation) دیا ہوا ہے کہ $\frac{dy}{dx} = f\,(x)$، ہم لکھتے ہیں $y = \int f\,(x)\,dx$

آسانی کے لیے، ہم جدول (7.1) میں ذیل علامتیں/اصطلاح/مقولے اور ان کے معنوں کے ساتھ دے رہے ہیں۔

جدول 7.1

علامتیں/اصطلاح/مقولے	معنی
$\int f(x)\,dx$	f کا تکملہ x مناسبت سے
$\int f(x)\,dx$ میں $f(x)$	تکمل
$\int f(x)\,dx$ میں x	تکمل کا متغیر
تکمل کرنا	تکملہ معلوم کرنا
f کا ایک تکملہ	ایک فنکشن F تا کہ $F'(x) = f\,(x)$
تکمل کرنا	تکمل معلوم کرنے کا عمل
تکمل کا مستقلہ	کوئی بھی حقیقی عدد C، جسے ایک مستقل تفاعل کے طور پر مانا گیا ہے۔

ہم پہلے ہی بہت سے مخصوص تفاعل کے مشتق کے لیے فارمولے جانتے ہیں ان فارمولوں سے ایک دم ان فنکشن کے تکملہ کے فارمولے ان ہی کے مطابق لکھ سکتے ہیں۔ (جنھیں معیاری فارمولہ کہا جاتا ہے)، جن کی فہرست نیچے دی گئی ہے جو کہ دوسرے تفاعل کے تکملہ معلوم کرنے میں استعمال کیے جائیں گے۔

	مشتق (Derivatives)	**تکملہ ضد مشتق (Integrals (Anti derivatives))**
(i)	$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$ ؛	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
	خاص طور پر، ہم نوٹ کرتے ہیں کہ،	
	$\frac{d}{dx}(x) = 1$ ؛	$\int dx = x + C$
(ii)	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ ؛	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
(iii)	$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$ ؛	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(iv) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ ؛ $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

(v) $\frac{d}{dx}(-\cot x) = \text{cosec}^2 x$ ؛ $\int \text{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C$

(vi) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ ؛ $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

(vii) $\frac{d}{dx}(-\text{cosec}\, x) = \text{cosec}\, x \cot x$ ؛ $\int \text{cosec}\, x \cot x\, dx = -\text{cosec}\, x + C$

(viii) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ؛ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

(xi) $\frac{d}{dx}(-\cos^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ؛ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$

(x) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ ؛ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

(xi) $\frac{d}{dx}(-\cot^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ ؛ $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + C$

(xii) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ ؛ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + C$

(xiii) $\frac{d}{dx}(-\text{cosec}^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ ؛ $\int \frac{ax}{x\sqrt{x^2-1}} = -\text{cosec}^{-1} x + C$

(xiv) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ ؛ $\int e^x dx = e^x + C$

(xv) $\frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x}$ ؛ $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$

(xvi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$ ؛ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

نوٹ عملی طور پر، عموماً ہم ان وقفوں کو ظاہر نہیں کرتے جہاں مختلف فنکشن کی معرف ہوں۔ حالانکہ کسی مخصوص مسئلہ کے دوران ہمیں اس کا دھیان رکھنا چاہیے۔

7.2.1 غیر معین تکملہ کا جیومیٹریائی ترجمانی (Geometrical interpretation of indefinite integral)

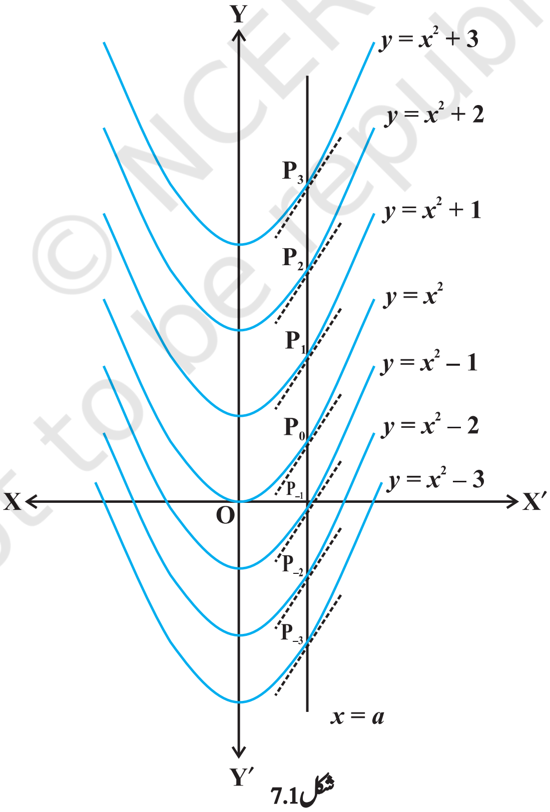
مان لیجیے $f(x) = 2x$، تب $\int f(x)\, dx = x^2 + C$ C کی مختلف قدروں کے لیے، ہمیں مختلف تکملہ حاصل ہوتے ہیں۔ لیکن

یہ تکملہ جیومیٹریائی انداز میں بالکل ایک جیسے ہیں۔

اس طرح، $y = x^2 + C$ ، جہاں C ایک اختیاری مستقلہ ہے، اور تکملوں کے ایک خاندان کو ظاہر کرتا ہے۔ C کو مختلف قدریں دینے پر، ہمیں خاندان کے مختلف افراد ملتے ہیں۔ یہ ایک ساتھ مل کر غیر معین تکملہ بناتے ہیں۔ اس معاملے میں، ہر ایک تکملہ y– محور کے ساتھ ایک مکافی (Parabola) کو ظاہر کرتا ہے۔

واضح طور پر C=0 کے لیے، ہمیں $y = x^2$ حاصل ہوتا ہے۔ ایک مکافی جس کا راس مبدا پر ہے۔ C=1 کے لیے، منحنی $y = x^2 + 1$ کے لیے، $y = x^2$ کو y– محور پر مثبت سمت میں بدلنے پر $y = x^2 - 1$ حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے، C کی ہر ایک مثبت قدر کے لیے خاندان کے ہر ایک مکافی کا راس y– محور کی مثبت سمت میں ہے اور C کی ہر ایک منفی قدر کے لیے اس کا راس y– محور کی منفی طرف ہے۔ ان میں سے کچھ کو شکل 7.1 میں دکھایا گیا ہے۔

آیئے ہم ان تمام مکافیوں کا خط $x=a$ کے ذریعہ تقاطع پر غور کریں۔ شکل 7.1 میں ہم نے $a>0$ لیا ہے۔ $a<0$ کے لیے بھی



شکل 7.1

یہی صحیح ہے ۔ اگر خط $x=a$ بالترتیب مکافیوں $y = x^2,\ y = x^2 + 1,\ y = x^2 + 2,\ y = x^2 - 1,\ y = x^2 - 2$ کو بالترتیب $P_0, P_1, P_2, P_{-1}, P_{-2}$ پر کاٹتا ہے وغیرہ؛ تب ان نقاط پر $\frac{dy}{dx}$، $2a$ کے برابر ہے۔ یہ، یہ ظاہر کرتا ہے کہ ان نقاط پر مماس منحنیوں کے متوازی ہیں۔اس طرح،(مان لیجیے) $\int 2x\,dx = x^2 + C = F_C(x)$ کا مطلب ہے کہ ان تمام منحنیوں $y = F_C(x),\ C \in R$ پر مماس، منحنیوں اور خط $x = a, (a \in R)$ کے تقاطع نقطوں پر متوازی ہیں۔

اس کے آگے ، ذیل مساوات (بیان) (مان لیجیے) $\int f(x)\,dx = F(x) + C = y$ منحنیوں کے خاندان (فیملی) کو ظاہر کرتی ہے۔C کی مختلف قدریں فیملی کے مختلف اعداد کے مطابق ہوں گی اور یہ ممبر کسی بھی منحنی کو بخود متوازی رکھنے پر حاصل ہو سکتے ہیں۔ یہ غیر معین تکملہ کا جیومیٹریائی بیان ہے۔

7.2.2 غیر معین تکملہ کی کچھ خصوصیات (Some properties of indefinite integral)

اس ذیلی سیکشن میں، ہم غیر معین تکملہ کی کچھ خصوصیات نکالیں گے۔

(I) تفرق اور تکمل کا عمل ذیل نتائج کی سوچ سے ایک دوسرے کا برعکس ہے:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

اور $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$، جہاں C ایک اختیاری مستقلہ ہے

ثبوت مان لیجیے F، f کا ضد مشتق ہے، یعنی

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

تب
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

اس لیے
$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\left(F(x) + C\right)$$

$$= \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

اسی طرح، ہم غور کرتے ہیں کہ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

اور اس لیے $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

جہاں C ایک اختیاری مستقلہ ہے اور جسے تکمل کا مستقلہ کہتے ہیں۔

(II) یکساں مشتق کے ساتھ دو غیر معین تکملہ منحنی کے یکساں خاندان کی طرف لے جاتے ہیں اس لیے یہ معادل ہیں۔

ثبوت مان لیجیے f اور g دو تفاعل ہیں تا کہ

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx$$

یا $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx\right] = 0$

اس لیے $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx = C$، جہاں C ایک حقیقی عدد ہے (کیوں؟)

یا $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx + C$

لہٰذا منحنی کے خاندان $\left\{\int f(x)\,dx + C_1, C_1 \in R\right\}$

اور $\left\{\int g(x)\,dx + C_2, C_2 \in R\right\}$ مماثل ہیں

اس لیے، اس نظریہ سے، $\int f(x)\,dx$ اور $\int g(x)\,dx$ برابر ہیں

> **نوٹ** $\left\{\int f(x)\,dx + C_1, C_1 \in \mathbf{R}\right\}$ اور $\left\{\int g(x)\,dx + C_2, C_2 \in \mathbf{R}\right\}$ خاندانوں کی معادلت عام طور پر بغیر پیرامیٹر کو بیان کیے ہوئے $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$ لکھ کر ظاہر کی جاتی ہے۔

(III) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

ثبوت: خصوصیت (I) کے ذریعے، ہمارے پاس ہے

$$\frac{d}{dx}\left[\int [f(x) + g(x)]\,dx\right] = f(x) + g(x) \qquad ...(1)$$

دوسری جانب، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx$$

$$= f(x) + g(x) \qquad ...(2)$$

اس طرح، خصوصیت (II) کو مدنظر رکھتے ہوئے، (1) اور (2) سے یہ حاصل ہوتا ہے

$$\int\big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

(IV) کسی بھی حقیقی عدد k کے لیے، $\int k\ f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

ثبوت: خصوصیت (I) سے، $\dfrac{d}{dx}\int k\ f(x)\,dx = k\ f(x)$

ساتھ ہی $\dfrac{d}{dx}\left[k\int f(x)\,dx\right] = k\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx = k\ f(x)$

اس لیے، خصوصیت (II) کے استعمال سے، ہمارے پاس ہے $\int k\ f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

(V) خصوصیت (III) اور (IV) کو تفاعل کی محدود تعداد $f_1, f_2, ..., f_n$ کے لیے عام کیا جا سکتا ہے اور یہ حقیقی اعداد، $k_1, k_2, ..., k_n$ دیتے ہیں

$$\int\left[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + ... + k_n f_n(x)\right]dx$$

$$= k_1\int f_1(x)\,dx + k_2\int f_2(x)\,dx + ... + k_n\int f_n(x)\,dx$$

ایک دیے گئے تفاعل کا ضد مشتق معلوم کرنے کے لیے، ہم اس تفاعل کی تلاش بہت غور فکر کے ساتھ کرتے ہیں جس کا مشتق دیا ہوا تفاعل ہے۔ ضروری تفاعل کی تلاش ایک ضد مشتق دریافت کرنے لیے تکمل کے نظر ثانی کا طریقہ کہلاتا ہے۔ ہم کچھ مثالوں کی مدد سے اسے ظاہر کر سکتے ہیں:

مثال 1: نظر ثانی کا طریقہ استعمال کر کے ذیل میں ہر ایک تفاعل کا ضد مشتق لکھیے

(i) $\cos 2x$ (ii) $3x^2 + 4x^3$ (iii) $\dfrac{1}{x}, x \neq 0$

حل: (i) ہم ایک ایسا تفاعل تلاش کرتے ہیں جس کا مشتق $\cos 2x$ ہے۔ یاد کیجیے کہ

$$\frac{d}{dx}\sin 2x = 2\cos 2x$$

یا اس لیے، $\cos 2x = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}(\sin 2x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)$ ۔ $\cos 2n$ کا $\dfrac{1}{2}\sin 2n$ ایک ضد مشتق ہے۔

(ii) ہم ایک ایسا تفاعل تلاش کرتے ہیں جس کا مشتق $3x^2 + 4x^3$ ہے۔ نوٹ کیجیے کہ

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 + x^4\right) = 3x^2 + 4x^3$$

اس لیے، $3x^2 + 4x^3$ کا ضد مشتق $x^3 + x^4$ ہے۔

(iii) ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}, x > 0 \text{ اور } \frac{d}{dx}[\log(-x)] = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, x < 0$$

مندرجہ بالا کو ایک ساتھ ملانے پر، ہمیں $\frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ حاصل ہوتا ہے

اس لیے، $\int \frac{1}{x}dx = \log|x|$ ، $\frac{1}{x}$ کا ایک ضد مشتق ہے۔

مثال 2: ذیل تکملہ دریافت کیجیے:

(i) $\int \frac{x^3-1}{x^2}dx$ (ii) $\int (x^{\frac{2}{3}}+1)\,dx$ (iii) $\int (x^{\frac{3}{2}}+2e^x-\frac{1}{x})\,dx$

حل: (i) ہمارے پاس ہے

$$\int \frac{x^3-1}{x^2}dx = \int x\,dx - \int x^{-2}\,dx \text{ (خصوصیت v سے)}$$

$$= \left(\frac{x^{1+1}}{1+1}+C_1\right) - \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C_2\right); \text{ تکمل کے مستقل ہیں } C_1, C_2$$

$$= \frac{x^2}{2}+C_1-\frac{x^{-1}}{-1}-C_2 = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C_1-C_2$$

$= \frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C$ ، جہاں $C = C_1 - C_2$ ایک دوسرا تکمل کے مستقلے ہیں۔

> **نوٹ** اب یہاں سے آگے، ہم آخری جواب میں صرف ایک ہی تکمل کے مستقلہ کا استعمال کریں گے۔

(ii) ہمارے پاس ہے

$$\int (x^{\frac{2}{3}}+1)\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx + \int dx$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+x+C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+x+C$$

(iii) ہمارے پاس ہے $\int (x^{\frac{3}{2}}+2e^x-\frac{1}{x})\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx + \int 2e^x\,dx - \int \frac{1}{x}dx$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 2e^x - \log|x| + C$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2e^x - \log|x| + C$$

مثال 3: ذیل تکملہ دریافت کیجیے:

(i) $\int (\sin x + \cos x)\, dx$ (ii) $\int \operatorname{cosec} x\, (\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx$

(iii) $\int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}\, dx$

حل:

(i) ہمارے پاس ہے

$$\int (\sin x + \cos x)\, dx = \int \sin x\, dx + \int \cos x\, dx$$

$$= -\cos x + \sin x + C$$

(ii) ہمارے پاس ہے

$$\int (\operatorname{cosec} x\, (\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx + \int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx$$

$$= -\cot x - \operatorname{cosec} x + C$$

(iii) ہمارے پاس ہے

$$\int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int \tan x \sec x\, dx$$

$$= \tan x - \sec x + C$$

مثال 4: f کا ضد مشتق F معلوم کیجیے جو کہ $f(x) = 4x^3 - 6$ سے بیان کیا گیا ہے، جہاں F(0)=3 ہے

حل: $f(x)$ کا ایک ضد مشتق $x^4 - 6x$ ہے، چوں کہ

$$\frac{d}{dx}(x^4 - 6x) = 4x^3 - 6$$

اس لیے، F کا ضد مشتق اس سے دیا گیا ہے

$F(x) = x^4 - 6x + C$، جہاں C مستقلہ ہے

دیا ہوا ہے $F(0) = 3$، جو دیتا ہے

$3 = 0 - 6 \times 0 + C$ یا $C = 3$

اس لیے، مطلوب ضد مشتق اکیلا تفاعل F ہے جو اس طرح بیان کیا گیا ہے

$F(x) = x^4 - 6x + 3$

ریمارک (Remarks)

(i) ہم دیکھتے ہیں کہ اگر F, f کا ضد مشتق ہے، تب F+C بھی اسی طرح ہے، جہاں C مستقلہ ہے۔ اس لیے، اگر ہم تفاعل f کا ایک مشتق F جانتے ہیں، ہم f کے لاتعداد ضد مشتق F کے ساتھ کوئی بھی مستقلہ جمع کرنے پر لکھ سکتے ہیں اور جسے $F(x)+C, C \in \mathbf{R}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ استعمال میں، یہ بہت بار ممکن ہے کہ ایک اور اضافی شرط کو مطمئن کرتا ہو جو بعد میں C کی ایک مخصوص قدر معلوم کرے اور فنکشن کا ایک واحد ضد مشتق دے۔

(ii) کبھی کبھی، F بنیادی تفاعل کے رکن میں بیان نہیں کیا جاسکتا جیسے کثیر رکنی، لوگارتمی، قوت نمائی، ٹرگنومیٹریائی تفاعلات اور ان کے معکوس وغیرہ۔ اس لیے ہم $\int f(x)\, dx$ معلوم کرنے سے رک جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر صرف معائنہ کرکے $\int e^{-x^2} dx$ دریافت کرنا ممکن نہیں ہے کیونکہ ہم وہ تفاعل نہیں معلوم کر سکتے جس کا مشتق e^{-x^2} ہے۔

(iii) ایک تکمل کا متغیر x کے علاوہ کسی اور متغیر سے ظاہر کیا جاتا ہے، تکملہ فارمولے میں بھی اسی کے حساب سے ردوبدل کی جاتی۔ مثال کے طور پر

$$\int y^4\, dy = \frac{y^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5} y^5 + C$$

7.2.3 تفرق اور تکمل کے درمیان موازنہ (Comparison between differentiation and integration)

1۔ دونوں تفاعلات پُر عمل ہیں۔

2۔ دونوں خطی خصوصیت کو مطمئن کرتے ہیں یعنی:

(i) $\dfrac{d}{dx}\left[k_1\ f_1\ (x)+k_2\ f_2\ (x)\right]=k_1\ \dfrac{d}{dx}\ f_1\ (x)+k_2\ \dfrac{d}{dx}\ f_2\ (x)$

(ii) $\int\left[k_1\ f_1\ (x)+k_2\ f_2\ (x)\right]dx=k_1\ \int f_1\ (x)\ dx+k_2\ \int f_2\ (x)\ dx$

یہاں k_1 اور k_2 مستقلہ ہیں۔

3۔ ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ سارے تفاعلات تفرق پذیر نہیں ہوتے ہیں۔ اسی طرح، تمام فنکشن تکمل پذیر نہیں ہوتے۔ ہم غیر تفرق پذیر اور غیر تکمل پذیر فنکشن کا مطالعہ اعلیٰ جماعتوں میں کریں گے۔

4۔ ایک تفاعل کا مشتق اگر موجود ہے تو وہ ایک واحد تفاعل ہے۔ ایک تفاعل کا تکمل اس طرح نہیں ہے۔ حالانکہ ایک جمعی مستقلہ تک واحد ہوتے ہیں یعنی ایک تفاعل کے کن ہی دو تکملوں میں ایک مستقلہ کا فرق ہوتا ہے۔

5۔ جب کثیر رکنی تفاعل P کی تفریق کی جاتی ہے تو نتیجہ ایک کثیر رکنی ہوتا ہے جس کی ڈگری (درجہ) P کے درجہ سے '1' کم ہوتا ہے۔ جب ایک کثیر رکنی تفاعل 'P' کا تکمیل کی جاتی ہے۔ نتیجہ ایک کثیر رکنی ہوتا ہے جس کا درجہ 'P' سے '1' زیادہ ہوتا ہے۔

6۔ ہم مشتق کی بات ایک نقطہ پر کر سکتے ہیں، ہم تکمیل کی بات ایک نقطہ پر نہیں کر سکتے، ہم ایک تفاعل کے تکملہ کا ذکر ایک وقفہ میں کر سکتے ہیں جس پر تکملہ بیان کیا گیا ہے جیسا کہ سیکشن 7.7 میں دیکھا جا سکتا ہے۔

7۔ ایک تفاعل کے مشتق کا جیومیٹریائی مطلب ہے، ایک مماس کا سلوپ اس کے مطابق منحنی کے ایک نقطہ پر۔ اسی طرح، ایک فنکشن کا تکملہ جیومیٹریائی طریقہ سے دکھایا گیا ہے، ایک منحنی کی فیملی جو کہ ایک دوسرے کے متوازی رکھی گئی ہے اور جس کے مماس منحنی کے خاندان کے نقطے، تقاطع پر متوازی ہیں، عمودی خطوط کے ساتھ خود محور پر اور جو کہ تکمیل کے متغیر کو ظاہر کرتی ہے۔

8۔ کچھ طبعی مقداروں کو دریافت کرنے کے لیے مشتق کا استعمال کیا جاتا ہے، مثال کے طور پر ایک حرکت کرتے ہوئے ذرے کی رفتار، جب کہ 't' وقفہ میں طے کیا گیا فاصلہ معلوم ہے، اسی طرح، تکملہ کا استعمال 't' وقفہ میں طے کیے گئے فاصلہ کو معلوم کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔

9۔ تفرق ایک عمل ہے جس میں حدود (limit) شامل ہیں۔ اسی طرح تکمیل ہے، جو کہ سیکشن 7.7 میں دیکھا جائے گا۔

10۔ تفرق اور تکمل کے عمل ایک دوسرے کے برعکس ہیں جیسا کہ سیکشن (i)7.2.2 میں بحث کی گئی ہے۔

مشق 7.1

معائنہ کے طریقے کی مدد سے ذیل تفاعل کے ضد مشتق (یا تکملہ) دریافت کیجیے:

1. $\sin 2x$ **2.** $\cos 3x$ **3.** e^{2x}

4. $(ax+b)^2$ **5.** $\sin 2x - 4e^{3x}$

مشق 6 تا 20 کے تکملہ دریافت کیجیے:

6. $\int (4e^{3x}+1)\,dx$ **7.** $\int x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$ **8.** $\int (ax^2+bx+c)\,dx$

9. $\int (2x^2+e^x)\,dx$ **10.** $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ **11.** $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx$

12. $\int \frac{x^3+3x+4}{\sqrt{x}}\,dx$ **13.** $\int \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}\,dx$ **14.** $\int (1-x)\sqrt{x}\,dx$

15. $\int \sqrt{x}\,(3x^2+2x+3)\,dx$ **16.** $\int (2x-3\cos x+e^x)\,dx$

17. $\int (2x^2-3\sin x+5\sqrt{x})\,dx$ **18.** $\int \sec x\,(\sec x+\tan x)\,dx$

19. $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}\,dx$ **20.** $\int \frac{2-3\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$

مشق 21 اور 22 میں صحیح جواب کا انتخاب کیجیے:

21۔ $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ کا ضد مشتق برابر ہے

(A) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$ (B) $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}x^2+C$

(C) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$ (D) $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+C$

22۔ اگر $\frac{d}{dx}f(x)=4x^3-\frac{3}{x^4}$ ہے تاکہ $f(2)=0$۔ تب $f(x)$

(A) $x^4+\frac{1}{x^3}-\frac{129}{8}$ (B) $x^3+\frac{1}{x^4}+\frac{129}{8}$

(C) $x^4+\frac{1}{x^3}+\frac{129}{8}$ (D) $x^3+\frac{1}{x^4}-\frac{129}{8}$

7.3 تکمل کے طریقے (Methods of Integration)

پچھلے سیکشن میں ہم نے ان تفاعلات پر بحث کی ہے جو کہ کچھ تفاعلات کے مشتق سے فوراً حاصل ہوتے ہیں یہ معائنہ پر مبنی تھا، یعنی اس فنکشن F کی تلاش میں جس کا مشتق f ہے اور جو کہ ہمیں تکملہ f کی طرف لے جاتا ہے۔ حالانکہ یہ طریقہ، جو کہ معائنہ پر مبنی ہے، بہت سے فنکشن کے لیے بہت موزوں نہیں ہے۔ اس لیے ہمیں اور بہت سے طریقوں کی ضرورت ہے۔ تکملہ کو دریافت کرنے کے لیے اسے معیاری شکل میں رکھ کر، ان میں سے جو خاص طریقہ یا تکنیک ہیں وہ ان پر مبنی ہیں:

1۔ بدل کے ذریعہ تکمل (Integration by Substitution)

2۔ جزوی کسروں کا استعمال کر کے تکمل (Integration using Partial Fractions)

3۔ بالحصص کے ذریعہ تکمل (Integration by Parts)

7.3.1 بدل کے ذریعہ تکمل (Integration by substitution)

اس سیکشن میں، بدل مقام کے ذریعہ تکمل کے طریقے پر غور کرتے ہیں۔

دیے ہوئے تکملہ $\int f(x)\,dx$ کو غیر معین متغیر x کو $x=g(t)$ t تبدیل کر کے دوسری شکل میں بدل سکتے ہیں۔

غور کیجیے $\qquad \mathrm{I}=\int f(x)\,dx$

رکھیے $x=g(t)$ تا کہ $\frac{dx}{dt}=g'(t)$ ہو سکے

ہم لکھتے ہیں $\qquad dx=g'(t)\,dt$

اس طرح $\qquad \mathrm{I}=\int f(x)\,dx=\int f(g(t))\,g'(t)\,dt$

متغیر کو بدلنے والا یہ فارمولہ ہمارے پاس ایک اہم اوزار ہے، بدل کے ذریعے تکمل کے نام سے یہ عام طور پر اس وقت اور بھی خاص ہو جاتا ہے جہاں ہمیں یہ اندازہ (قیاس آرائی) ہے کہ بدل سے کیا فائدہ ہوگا۔ عام طور پر ہم ایک تفاعل کے لیے ایک بدل کرتے ہیں جس کا مشتق بھی تکمل کی شکل بر آمد ہے جیسا کہ مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعے بیان کیا گیا ہے۔

مثال 5: x کی وضاحت درج ذیل تفاعل کا تکمل کیجیے۔

(i) $\sin mx$ (ii) $2x \sin (x^2 + 1)$

(iii) $\dfrac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (iv) $\dfrac{\sin (\tan^{-1} x)}{1 + x^2}$

حل: ہم جانتے ہیں کہ mx کا مشتق m ہے۔ اس لیے ہم $mx = t$ رکھتے ہیں تا کہ $mdx = dt$

اس لیے $\int \sin mx \, dx = \dfrac{1}{m} \int \sin t \, dt = -\dfrac{1}{m} \cos t + C = -\dfrac{1}{m} \cos mx + C$

(ii) $x^2 + 1$ کا مشتق $2x$ ہے۔ اس لیے، ہم $x^2 + 1 = t$ بدل کا استعمال کرتے ہیں تا کہ $2x \, dx = dt$ ہو۔

اس لیے، $\int 2x \sin (x^2 + 1) \, dx = \int \sin t \, dt = -\cos t + C = -\cos (x^2 + 1) + C$

(iii) $\sqrt{x}$ کا مشتق $\dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ہے۔ اس طرح، ہم $\sqrt{x} = t$ بدل کا استعمال کرتے ہیں تا کہ $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$ ہو جو

کہ دیتا ہے $dx = 2t \, dt$

اس طرح $\displaystyle\int \frac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{2t \tan^4 t \sec^2 t \, dt}{t} = 2 \int \tan^4 t \sec^2 t \, dt$

دوبارہ، ہم $\tan t = u$ رکھتے ہیں تا کہ $\sec^2 t \, dt = du$ ہو سکے

اس لیے، $2 \displaystyle\int \tan^4 t \sec^2 t \, dt = 2 \int u^4 \, du = 2 \frac{u^5}{5} + C$

$= \dfrac{2}{5} \tan^5 t + C$ (کیونکہ $u = \tan t$ ہے)

$= \dfrac{2}{5} \tan^5 \sqrt{x} + C$ (کیونکہ $t = \sqrt{x}$ ہے)

اس لیے، $\displaystyle\int \frac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5} \tan^5 \sqrt{x} + C$

متبادل کے طور پر، $\tan \sqrt{x} = t$ رکھیے

(iv) $\tan^{-1} x = \dfrac{1}{1 + x^2}$ کا مشتق ہے۔ اس لیے، ہم

$\tan^{-1} x = t$ رکھتے ہیں تا کہ $\dfrac{dx}{1 + x^2} = dt$

اس لیے، $\int \frac{\sin(\tan^{-1}x)}{1+x^2}\,dx = \int \sin t\,dt = -\cos t + C = -\cos(\tan^{-1}x) + C$

اب بدل کے ذریعے طریقہ کا استعمال کر کے کچھ تکملوں پر بحث کرتے ہیں جس میں ٹرگنومیٹریائی تفاعلات اور ان کے معیاری تکملے شامل ہیں۔ یہ بعد میں بغیر حوالہ کے استعمال کیے جائیں گے۔

(i) $\displaystyle \int \tan x\,dx = \log|\sec x| + C$

ہمارے پاس ہے

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$\cos x = t$ رکھیے تا کہ $\sin x\,dx = -dt$

تب $$\int \tan x\,dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| + C = -\log|\cos x| + C$$

یا $$\int \tan x\,dx = \log|\sec x| + C$$

(ii) $\displaystyle \int \cot x\,dx = \log|\sin x| + C$

ہمارے پاس ہے $$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$\sin x = t$ رکھیے تا کہ $\cos x\,dx = dt$

تب $$\int \cot x\,dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|\sin x| + C$$

(iii) $\displaystyle \int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| + C$

ہمارے پاس ہے

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\,dx$$

$\sec x + \tan x = t$ رکھیے تا کہ $\sec x(\tan x + \sec x)\,dx = dt$

اس لیے، $$\int \sec x\,dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|\sec x + \tan x| + C$$

(iv) $\displaystyle \int \operatorname{cosec} x\,dx = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

ہمارے پاس ہے
$$\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x(\operatorname{cosec} x + \cot x)}{(\operatorname{cosec} x + \cot x)} dx$$

رکھیے $\operatorname{cosec} x+\cot x=t$ تاکہ $-\operatorname{cosec} x\,(\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx = dt$

اس لیے
$$\int \operatorname{cosec} x\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| = -\log|\operatorname{cosec} x + \cot x| + C$$

$$= -\log\left|\frac{\operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x}{\operatorname{cosec} x - \cot x}\right| + C$$

$$= \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$$

مثال6: ذیل تکملے معلوم کیجیے:

(i) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$ (ii) $\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)} dx$ (iii) $\int \frac{1}{1+\tan x} dx$

حل:

(i) ہمارے پاس ہے
$$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x\,(\sin x)\, dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\,(\sin x)\, dx$$

رکھیے $t = \cos x$ تاکہ $dt = -\sin x\, dx$

اس لیے
$$\int \sin^2 x \cos^2 x\,(\sin x)\, dx = -\int (1-t^2)\, t^2\, dt$$

$$= -\int (t^2 - t^4)\, dt = -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

(ii) رکھیے $x + a = t$ ۔ تب $dx = dt$ اس لیے

$$\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)} dx = \int \frac{\sin(t-a)}{\sin t} dt$$

$$= \int \frac{\sin t\cos a - \cos t\sin a}{\sin t} dt$$

$$=\cos a\int dt-\sin a\int\cot t\,dt$$

$$=(\cos a)\,t-(\sin a)\left[\log|\sin t|+C_1\right]$$

$$=(\cos a)\,(x+a)-(\sin a)\left[\log|\sin(x+a)|+C_1\right]$$

$$=x\cos a+a\cos a-(\sin a)\log|\sin(x+a)|-C_1\sin a$$

اس لیے، $\int\frac{\sin x}{\sin(x+a)}dx=x\cos a-\sin a\log|\sin(x+a)|+C$

جہاں، $C=-C_1\sin a+a\cos a$ ، ایک دوسرا اختیاری مستقلہ ہے۔

(iii) $$\int\frac{dx}{1+\tan x}=\int\frac{\cos x\,dx}{\cos x+\sin x}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(\cos x+\sin x+\cos x-\sin x)\,dx}{\cos x+\sin x}$$

$$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{C_1}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx \qquad \text{......(1)}$$

اب $I=\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$ پر غور کیجیے

$\cos x+\sin x=t$ رکھیے تا کہ $(\cos x-\sin x)\,dx=dt$

اس لیے $I=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C_2=\log|\cos x+\sin x|+C_2$

اسے (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int\frac{dx}{1+\tan x}=\frac{x}{2}+\frac{C_1}{2}+\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+\frac{C_2}{2}$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \log |\cos x + \sin x| + C, \left(C = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2} \right)$$

مشق 7.2

مشق 1 تا 37 میں فنکشن کا تکمل کیجیے۔

1. $\frac{2x}{1+x^2}$ **2.** $\frac{(\log x)^2}{x}$ **3.** $\frac{1}{x + x\log x}$

4. $\sin x \sin(\cos x)$ **5.** $\sin(ax+b)\cos(ax+b)$

6. $\sqrt{ax+b}$ **7.** $x\sqrt{x+2}$ **8.** $x\sqrt{1+2x^2}$

9. $(4x+2)\sqrt{x^2+x+1}$ **10.** $\frac{1}{x-\sqrt{x}}$ **11.** $\frac{x}{\sqrt{x+4}}, x > 0$

12. $(x^3-1)^{\frac{1}{3}} x^5$ **13.** $\frac{x^2}{(2+3x^3)^3}$ **14.** $\frac{1}{x(\log x)^m}, x > 0$

15. $\frac{x}{9-4x^2}$ **16.** e^{2x+3} **17.** $\frac{x}{e^{x^2}}$

18. $\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$ **19.** $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ **20.** $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$

21. $\tan^2(2x-3)$ **22.** $\sec^2(7-4x)$ **23.** $\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

24. $\frac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}$ **25.** $\frac{1}{\cos^2 x(1-\tan x)^2}$ **26.** $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

27. $\sqrt{\sin 2x}\cos 2x$ **28.** $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ **29.** $\cot x \log \sin x$

30. $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ **31.** $\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$ **32.** $\frac{1}{1+\cot x}$

33. $\frac{1}{1-\tan x}$ **34.** $\frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}$ **35.** $\frac{(1+\log x)^2}{x}$

36. $\dfrac{(x+1)(x+\log x)^2}{x}$ **37.** $\dfrac{x^3\sin\left(\tan^{-1}x^4\right)}{1+x^8}$

38اور 39 سوالوں میں صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

38۔ $\int \dfrac{10x^9+10^x \log_{e^{10}} dx}{x^{10}+10^x}$ برابر ہے

(A) $10^x - x^{10} + C$ (B) $10^x + x^{10} + C$

(C) $(10^x - x^{10})^{-1} + C$ (D) $\log(10^x + x^{10}) + C$

39۔ $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ برابر ہے

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x - \cot x + C$

(C) $\tan x \cot x + C$ (D) $\tan x - \cot 2x + C$

7.3.2 ٹرگنومیٹریائی اکائیوں کا استعمال کرکے تکمل کرنا (Integration using trigonometric identities)

جب تکملہ میں کچھ ٹرگنومیٹریائی تفاعل ملوث ہوتے ہیں، تکملہ دریافت کرنے کے لیے ہم کچھ جانی پہچانی اکائیوں کا استعمال کرتے ہیں جیسا کہ ذیل کی مثالوں کے ذریعہ سمجھایا گیا ہے۔

مثال 7: معلوم کیجیے (i) $\int \cos^2 x\, dx$ (ii) $\int \sin 2x \cos 3x\, dx$ (iii) $\int \sin^3 x\, dx$

حل: (i) متماثل $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ کو یاد کیجیے، جو دیتی ہے

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

اس لیے،

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(ii) متماثل $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$ کو یاد کیجیے (کیوں؟)

تب

$$\int \sin 2x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 5x\, dx \int \sin x\, dx\right]$$