باب 13

5260CH13

احتمال
(PROBABILITY)

❖احتمالات کانظریہ سادے طورپرمنطق کی سائنس ہے،جسے مقداری طورپرسمجھا گیا ہے—سی-ایس- پیرس❖

13.1 تعارف(Introduction)

پچھلی جماعتوں میں ہم نے ایک بلامنصوبہ تجربہ میں احتمال کا مطالعہ واقعات کے غیر یقینی وقوعات کی پیمائش کے طور پر کیا ہے۔ ہم نے موضوعی نظریہ پر بحث کیا ہے جو کہ روسی ریاضی داں، اے.این.کول موگورو(1987–1903) نے تشکیل کیا تھا،اور احتمال کو تجربہ کے ایک تفاعل کے نتائج کے طور پر سمجھا ہے۔ہم نے مساوی ممکنہ نتائج کے کیس میں احتمال کے موضوعی نظریہ اور معیاری نظریہ کے درمیان معادلت کو قائم کیا ہے۔اس رشتہ کی بنیاد پر،ہم نے واقعات کے احتمالات کو حاصل کیا ہے جو کہ منفصل سیمپل فضا سے جڑا ہوا ہے۔ہم نے احتمال کے مجموعی اصول کا بھی مطالعہ کیا ہے۔اس باب میں،ہم ایک واقعہ کا مشروط احتمال کے مخصوص تصور پر بحث کریں گے جب کہ دیا ہوا ہے کہ ایک دوسرا واقع وجود میں آ گیا ہے،اور جو بائیس مسئلہ (Bayes' Theorem) کو سمجھنے میں مددگار ثابت ہوگا،ایک احتمال کا ضربی اصول اور واقعات کا غیر تابع ہے۔ہم غیر منصوبہ متغیر اور اس کے احتمالی بٹوارے کے ایک مخصوص تصور اور احتمال بٹوارے کے درمیانہ اور تغیر (تبدیلی) کو بھی سیکھیں گے۔باب کے آخری حصہ میں ہم ایک مخصوص منفصل احتمال بٹوارے کا مطالعہ کریں گے، جسے دورکنی بٹاؤ (Binomial distribution) کہتے ہیں۔ اس مکمل باب میں ہم ان تجربات کو لیں گے جن میں مساوی ممکنہ نتائج موجود ہیں، جب تک بیان نہ کیا گیا ہو۔

پیرے ڈی فرماٹ
(Pierre de Fermat)
(1601-1665)

13.2 مشروط احتمال (Conditional Probability)

ابھی تک احتمال میں، ہم نے احتمال کے وقوعات کو معلوم کرنے کے طریقوں پر بحث کی ہے۔ اگر ہمارے پاس اُس سیمپل فضا سے دو وقوعات موجود ہیں، کیا وقوعات میں سے ایک کے وقوعہ کی خبر دوسرے وقوعہ کے احتمال پر اثر ڈالے گی؟ ایک غیر منصوبہ تجربہ کر کے ہمیں اس سوال کا جواب دینے کی کوشش کرنی چاہیے جس میں نتائج کا وقوعہ مساوی ممکنہ ہو۔

تین غیر جانب دار سکوں کو اچھالنے کے ایک تجربہ پر غور کیجیے۔ تجربہ کی سیمپل فضا ہے

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

کیونکہ سکے اچھے ہیں، ہم ہر سیمپل نقطہ کو $\frac{1}{8}$ احتمال دے سکتے ہیں۔ مان لیجیے کم سے کم ہیڈ نمودار ہونے کا واقعہ E ہے اور، پہلے سکے کی ٹیل پر ٹیل آنے کا، واقعہ F ہے۔

تب

$$E = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$$

اور $$F = \{THH, THT, TTH, TTT\}$$

اس لیے $$P(E) = P(\{HHH\}) + P(\{HHT\}) + P(\{HTH\}) + P(\{THH\})$$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2} \quad (\text{کیوں؟})$$

اور $$P(F) = P(\{THH\}) + P(\{THT\}) + P(\{TTH\}) + P(\{TTT\})$$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

ساتھ ہی $$E \cap F = \{THH\}$$

جس کے ساتھ ہے $$P(E \cap F) = P(\{THH\}) = \frac{1}{8}$$

اب، مان لیجیے کہ ہمیں دیا ہوا ہے کہ پہلا سکا ٹیل دکھاتا ہے، یعنی F واقع ہوا ہے، تب E کے واقع ہونے کا کیا احتمال ہے؟ F کے واقع ہونے کی خبر سے، ہمیں یقین ہے کہ جن کیس میں پہلے سکہ کا نتیجہ ایک ٹیل نہیں ہے، پر E کا احتمال معلوم کرنے میں غور نہیں کیا جانا چاہیے۔ یہ معلومات ہماری سیمپل فضا کو سیٹ 'S' سے وقوعہ E کے لیے ماتحت سیٹ F میں تحویل کر دیتی

ہے۔ دوسرے الفاظ میں، حقیقت میں مزید معلومات ہمیں یہ بتاتی ہے کہ حالات پر ایک نئے بلا منصوبہ تجربہ کی طرح غور کرنا چاہیے جس کے لیے سیمپل فضا میں تمام نتائج موجود ہوں جو کہ وقوعہ F کے واقع ہونے کے موافق ہیں۔

اب، F کا سیمپل نقطہ جو کہ واقعہ E کے لیے موافق ہے THH ہے۔

اس طرح، F کو سیمپل فضا تصور کرتے ہوئے E کا احتمال $= \frac{1}{4}$ ہے،

یا E کی احتمال جب کہ دیا ہوا ہے کہ وقوعہ F واقع ہو گیا

واقعہ E کا یہ احتمال E کا مشروط احتمالی کہلاتا ہے جب کہ دیا ہوا ہے کہ F پہلے ہی وجود میں آچکا ہے، اور اسے P(E|F) سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اس طرح $P(E|F) = \frac{1}{4}$

یہ نوٹ کر لیجیے کہ F کے عناصر جو کہ واقعہ E کے موافق لیے ہیں، E اور F ہیں مشترک عناصر ہیں، یعنی F، $E \cap F$ کے سیمپل نقاط۔

اس طرح، ہم E کا مشروط احتمال لکھ سکتے ہیں جب کہ دیا ہوا ہے کہ F اس طرح وجود میں آچکا ہے

$$P(E|F) = \frac{\text{بنیادی واقعات کی تعداد جو کہ } E \cap F \text{ کے موافق ہیں}}{\text{بنیادی واقعات کی تعداد جو کہ } F \text{ کے موافق ہیں}}$$

$$= \frac{n(E \cap F)}{n(F)}$$

سیمپل فضا کے بنیادی وقوعات کی کل تعداد سے شمار کنندہ اور نسب نماں کو تقسیم کرنے پر، ہم دیکھتے ہیں کہ P(E|F) اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے

$$P(E|F) = \frac{\frac{n(E \cap F)}{n(S)}}{\frac{n(F)}{n(S)}} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \quad \text{(1) ...}$$

یہ نوٹ کر لیجیے کہ (1) صرف اسی وقت صحیح ہے جب کہ $P(F) \neq 0$، یعنی $F \neq \phi$ (کیوں؟)

اس طرح، ہم مشروط احتمال کو ذیل کی طرح بیان کر سکتے ہیں:

تعریف 1: اگر دو واقعات ایک بلا منصوبہ تجربہ میں E اور F ایک ہی سیمپل فضا کے ساتھ جڑے ہوئے ہوں، واقعہ E کا مشروط

احتمال، جب کہ دیا ہوا ہے کہ F وجود میں آ چکا ہے۔ یعنی P (E|F) اس طرح دیا گیا ہے

جب کہ $P(F) \neq 0$

13.2.1 مشروط احتمال کی خصوصیات (Properties of Conditional Probability)

مان لیجیے، ایک تجربہ میں ایک سیمپل فضا کے E اور F وقوعات ہیں، تب ہمارے ماس ہے

خصوصیت 1: $P(S|F) = P(F|F) = 1$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P(S|F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

ساتھ ہی

$$P(F|F) = \frac{P(F \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

اس طرح

$$P(S|F) = P(F|F) = 1$$

خصوصیت 2: مان لیجیے ایک سیمپل فضا S کے دو وقوعات A اور B ہیں اور F، S کا ایک وقوعہ ہے تا کہ $P(F) \neq 0$، تب

$$P((A \cup B)|F) = P(A|F) + P(B|F) - P((A \cap B)|F)$$

خاص طور پر، اگر A اور B غیر مشترک وقوعات ہیں، تب

$$P((A \cup B)|F) = P(A|F) + P(B|F)$$

ہمارے پاس ہے

$$P((A \cup B)|F) = \frac{P[(A \cup B) \cap F]}{P(F)}$$

$$= \frac{P[(A \cap F) \cup (B \cap F)]}{P(F)}$$

نقاطع پر سیٹوں کے اجماع کی تقسیمی خصوصیت ہے۔

$$= \frac{P(A \cap F) + P(B \cap F) - P(A \cap B \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} + \frac{P(B \cap F)}{P(F)} - \frac{P[(A \cap B) \cap F]}{P(F)}$$

$$=P(A|F) + P(B|F) - P((A\cap B)|F)$$

جب A اور B غیر مشترک وقوعات ہیں، تب

$$P((A \cap B)|F)=0$$

$$\Rightarrow \quad P((A \cup B)|F) = P(A|F) + P(B|F)$$

خصوصیت 3: $P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

خصوصیت 1، سے، ہم جانتے ہیں کہ $P(S|F) = 1$

$$P(E \cup E'|F) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{کیوں کہ } S = E \cup E'$$

$$P(E|F) + P(E'|F) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{کیونکہ E اور E' غیر مشترک وقوعات ہیں}$$

اس طرح $P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

اب ہمیں کچھ مثالیں لینی چاہئیں

مثال 1: اگر $P(A) = \frac{7}{13}$، $P(B) = \frac{9}{13}$ اور $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$ ہے، تب $P(A|B)$ کی قیمت کا اندازہ لگائیے۔

حل: ہمارے پاس ہے $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{13}}{\frac{9}{13}} = \frac{4}{9}$

مثال 2: ایک خاندان میں دو بچے ہیں، اس کا کیا احتمال ہے کہ دونوں بچے لڑکے ہیں جبکہ یہ دیا ہوا ہے کہ ان میں سے کم سے کم ایک لڑکا ہے؟

حل: مان لیجیے b لڑکے کو اور g لڑکی کو ظاہر کرتا ہے۔ تجربہ کی سیمپل فضا ہے

$$S = \{(b, b), (g, b), (b, g), (g, g)\}$$

مان لیجیے E اور F ذیل واقعات کو ظاہر کرتے ہیں۔

E : 'دونوں بچے لڑکے ہیں'

F : 'کم سے کم ایک بچہ لڑکا ہے'

تب $E = \{(b,b)\}$ اور $F = \{(b,b), (g,b), (b,g)\}$

اب $E \cap F = \{(b,b)\}$

اس طرح $P(F) = \frac{3}{4}$ اور

اس لیے $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

مثال 3: دس کارڈ جن پر 1 تا 10 نمبر ڈالے گئے ہیں ایک باکس میں رکھے گئے ہیں، اور اچھی طرح ملائے گئے ہیں، اور تب ایک کارڈ بلا منصوبہ نکالا گیا ہے۔ اگر یہ معلوم ہے کہ نکالے ہوئے کارڈ پر نمبر، 3 سے زیادہ ہے، تب اس کا کیا احتمال ہے کہ یہ نمبر جفت ہے؟

حل: مان لیجیے A نکالے ہوئے کارڈ پر جفت نمبر کا وقوعہ ہے اور B نکالے ہوئے کارڈ پر 3 سے زیادہ نمبر کا وقوعہ ہے۔ ہمیں P(A|B) معلوم کرنا ہے۔ اب تجربہ کی سیمپل فضا ہے $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

تب $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \ B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

اور $A \cap B = \{4, 6, 8, 10\}$

ساتھ ہی $P(A \cap B) = \frac{4}{10}$ اور $P(B) = \frac{7}{10}$ ، $P(A) = \frac{5}{10}$

تب $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}$

مثال 4: ایک اسکول میں 1000 طلبا ہیں، جن میں 430 لڑکیاں ہیں۔ یہ معلوم ہے کہ 430 میں، 10 فی صدی لڑکیاں بارھویں جماعت میں پڑھتی ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ بلا منصوبہ چنی گئی لڑکی بارھویں جماعت میں پڑھتی ہے، جب کہ دیا ہوا ہے کہ چنی گئی لڑکی بارھویں جماعت کی طالبہ ہے؟

حل: مان لیجیے E اس واقعہ کو ظاہر کرتا ہے کہ بلا منصوبہ چنا گیا طالب علم بارھویں جماعت میں پڑھتا ہے اور F اس وقوعہ کو ظاہر کرتا ہے کہ بلا منصوبہ چنی گئی ایک طالبہ ہے۔ ہمیں P (E|F) معلوم کرنا ہے۔

اب $P(F) = \frac{430}{1000} = 0.43$ اور $P(E \cap F) = \frac{43}{1000} = 0.043$ (کیوں؟)

تب $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.043}{0.43} = 0.1$

مثال 5: ایک پانسہ کو تین مرتبہ اچھالا گیا ہے۔ وقوعات A اور B کو ذیل کی طرح بیان کیا گیا ہے:

A: 4 تیسری بار اچھالنے میں

B: 6 پہلی بار میں اور 5 دوسری بار اچھالنے میں

A کا احتمال معلوم کیجیے جب کہ دیا ہوا ہے کہ B پہلے ہی واقع ہو چکا ہے۔

حل: سیمپل فضا میں 216 نتائج ہیں۔

$$A = \begin{Bmatrix} (1,1,4) & (1,2,4) & \ldots & (1,6,4) & (2,1,4) & (2,2,4) & \ldots & (2,6,4) \\ (3,1,4) & (3,2,4) & \ldots & (3,6,4) & (4,1,4) & (4,2,4) & \ldots & (4,6,4) \\ (5,1,4) & (5,2,4) & \ldots & (5,6,4) & (6,1,4) & (6,2,4) & \ldots & (6,6,4) \end{Bmatrix}$$

$$B = \{(6,5,1), (6,5,2), (6,5,3), (6,5,4), (6,5,5), (6,5,6)\}$$

اور $A \cap B = \{(6,5,4)\}$

اب $P(A \cap B) = \frac{1}{216}$ اور $P(B) = \frac{6}{216}$

تب $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{216}}{\frac{6}{216}} = \frac{1}{6}$$

مثال 6: ایک ڈائی (پانسہ) کو دو بار اچھالا گیا ہے اور اس پر ظاہر ہونے والے اعداد کا حاصل جمع 6 ہے مشاہدہ کیا گیا ہے۔ عدد 4 کم سے کم ایک بار ظاہر ہونے کا شرطیہ احتمال کیا ہے؟

حل: مان لیجیے E وہ واقعہ ہے کہ 'عدد 4 کم سے کم ایک بار ظاہر' ہوا ہے اور F وہ 'واقعہ ہے کہ ظاہر ہونے والے اعداد کا حاصل جمع 6 ہے'۔

تب، $E = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (1,4), (2,4), (3,4), (5,4), (6,4)\}$

اور $F = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

ہمارے پاس ہے $P(F) = \frac{5}{36}$ اور $P(E) = \frac{11}{36}$

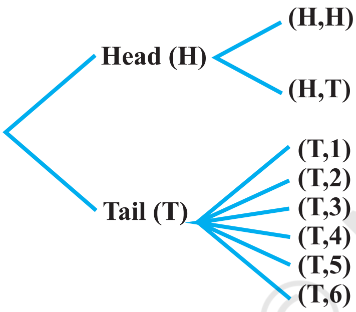
ساتھ ہی $E \cap F = \{(2,4), (4,2)\}$

اس لیے $\quad P(E\cap F)=\frac{2}{36}$

اس لیے، مطلوبہ احتمال

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{2}{5}$$

مشروط احتمال کے لیے جس پر اوپر بحث کی گئی ہے، جس کے لیے، ہم نے تجربہ کے بنیادی وقوعات پر غور کیا ہے جو کہ مساوی امکانی ہیں اور اس کے مطابق ایک وقوعہ کے احتمال کو استعمال کیا گیا ہے۔ حالانکہ، یہی تعریف عام کیس میں بھی استعمال کی جا سکتی ہے جہاں سیمپل فضا کے بنیادی واقعات مساوی امکانی نہیں ہیں، احتمالات $P(E\cap F)$ اور $P(F)$ اسی کے مطابق حل کیے گئے ہیں۔ ہمیں مندرجہ ذیل مساوات کو لینا چاہیے۔

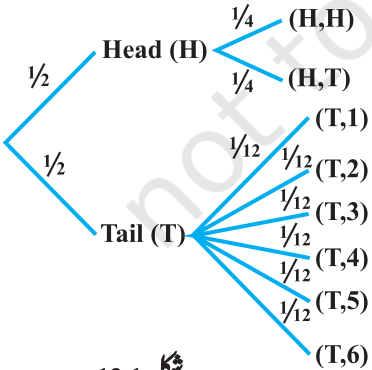


شکل 13.1

مثال 7: ایک سکہ کے ٹاس کرنے کے تجربہ پر غور کیجیے، اگر سکہ ہیڈ دکھاتا ہے، اسے دوبارہ ٹاس کیجیے، لیکن اگر یہ ٹیل دکھاتا ہے، تب ایک پانسہ پھینکنے واقعہ کا شرطی احتمال معلوم کیجیے جبکہ پانسہ 4 سے بڑا عدد دکھاتا ہے، یہ دیا ہوا ہے کہ کم سے کم ایک ٹیل ہے۔

حل: تجربہ کے نتائج مندرجہ ذیل شکلی انداز میں ایک 'پیڑ کی تصویر' کی شکل میں دکھائے گئے ہیں۔

تجربہ کی سیمپل فضا اس طرح بیان کی جا سکتی ہے



شکل 13.1

S = {(H,H), (H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)}

جہاں (H,H) ظاہر کرتے ہیں کہ دونوں ٹاس کے نتائج ہیڈ ہیں اور (T, i) پہلے ٹاس کے نتیجہ کو ظاہر کرتا ہے جس میں ایک ٹیل نمودار ہوئی ہے اور عدد 'i' جو کہ پانسہ پر ظاہر ہوتا ہے $i=1,2,3,4,5,6$ کے لیے ہے۔ اس طرح 8 بنیادی وقوعات

(H, H), (H, T), (T, 1), (T, 2), (T, 3) (T, 4), (T, 5), (T, 6)

کو جو احتمالات دیے گئے ہیں، وہ بالترتیب ہیں:

$\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12}$ جو کہ تصویر 13.2 سے صاف ہے۔

مان لیجیے، کم سے کم ایک ٹیل کا وقوعہ F ہے اور پانسہ کے ذریعہ 4 سے بڑا ایک عدد دکھانے کا وقوعہ E ہے۔ تب،

$$F = \{(H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$$

$$E = \{(T,5), (T,6)\} \text{ اور } E \cap F = \{(T,5), (T,6)\}$$

اب
$$P(F) = P(\{(H,T)\}) + P(\{(T,1)\}) + P(\{(T,2)\}) + P(\{(T,3)\}) + P(\{(T,4)\}) + P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\})$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

اور
$$P(E \cap F) = P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

اس طرح
$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{9}$$

مشق 13.1

1۔ E اور F دو وقوعات دیے ہوئے ہیں تا کہ $P(E) = 0.6$، $P(F) = 0.3$ اور $P(E \cap F) = 0.2$، تب $P(E|F)$ اور $P(F|E)$ معلوم کیجیے۔

2۔ $P(A|B)$ معلوم کیجیے، اگر $P(B) = 0.5$ اور $P(A \cap B) = 0.32$ ہے۔

3۔ اگر $P(A) = 0.8$، $P(B) = 0.5$ اور $P(B|A) = 0.4$ ہے۔ تب معلوم کیجیے۔

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A|B)$ (iii) $P(A \cup B)$

4۔ $P(A \cup B)$ کی قدر معلوم کیجیے، اگر $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ اور

5۔ اگر $P(A) = \frac{6}{11}$، $P(B) = \frac{5}{11}$ اور $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$، تو معلوم کیجیے۔

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A|B)$ (iii) $P(B|A)$

سوال 6 تا 9 میں $P(E|F)$ معلوم کیجیے۔

6۔ ایک سکہ کو تین بار اچھالا کیا گیا ہے، جہاں

(i) E : ہیڈ تیسری اچھال پر، F : ہیڈ پہلی دو اچھال پر

(ii) E : کم سے کم دو ہیڈ، F : زیادہ سے زیادہ دو ہیڈ

(iii) E : زیادہ سے زیادہ دو ٹیل، F : کم سے کم ایک ٹیل

7۔ دو سکے ساتھ اُچھالے گئے، جہاں

(i) E : ٹیل ایک سکہ پر ظاہر ہوئی F : ایک سکہ ہیڈ دکھاتا ہے

(ii) E : کوئی ٹیل ظاہر نہیں ہوئی F : کوئی ہیڈ ظاہر نہیں ہوا

8۔ ایک پانسہ کو تین بار پھینکا گیا ہے

E : تیسری اُچھال پر 4 ظاہر ہوتا ہے F : پہلی دو اُچھال پر بالترتیب 6 اور 5 ظاہر ہوتے ہیں

9۔ ایک فیملی کی تصویر کھینچنے کے لیے ماں، باپ اور لڑکے کو بلا منصوبہ ایک قطار میں کھڑا کیا گیا

E : لڑکے کو ایک سرے پر F : والد کو درمیان میں

10۔ ایک کالے اور ایک لال پانسے کو پھینکا گیا۔

(a) 9 سے زیادہ حاصل جمع حاصل کرنے کے لیے مشروط احتمال معلوم کیجیے، جب کہ دیا ہوا ہے کہ کالے پانسہ کا نتیجہ 5 ہے۔

(b) حاصل جمع 8 حاصل کرنے کے لیے مشروط احتمال معلوم کیجیے، جب کہ دیا ہوا ہے کہ لال پانسہ کا نتیجہ عدد 4 سے کم ہے۔

11۔ ایک غیر جانب دار پانسہ پھینکا گیا ہے۔ وقوعات $E=\{1,3,5\}$، $F=\{2,3,\}$ اور $G=\{2,3,4,5\}$ پر غور کیجیے معلوم کیجیے

(i) $P(E|F)$ اور $P(F|E)$ (ii) $P(E|G)$ اور $P(G|E)$

(iii) $P((E \cup F)|G)$ اور $P((E \cap F)|G)$

12۔ یہ مان لیجیے کہ ہر پیدا ہونے والا بچہ مساوی امکانی طور پر ایک لڑکا یا ایک لڑکی ہے۔ اگر ایک خاندان میں دو بچے ہیں، مشروط احتمال کیا ہے کہ دونوں لڑکیاں ہے، دیا ہوا ہے کہ (i) پہلے پیدا ہونے والا بچہ لڑکی ہے، (ii) کم سے کم ایک لڑکی ہے؟

13۔ ایک معلم (Instructor) کے پاس ایک سوالوں کا بینک ہے جس میں 300 آسان صحیح/غلط سوال شامل ہیں، 200

مشکل صحیح / غلط سوال، 500 آسان کثیر جوابی سوالات اور 400 مشکل کثیر جوابی سوالات ہیں۔ اگر ایک سوال کو سوالوں کے بینک سے بلامنصوبہ چنا گیا ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ یہ ایک آسان سوال ہے، یہ دیا ہوا ہے کہ یہ ایک کثیر جوابی سوال ہے؟

14۔ دیا ہوا ہے کہ اچھالے گئے دو پانسوں پر دو مختلف اعداد ظاہر ہو رہے ہیں۔ اس وقوعہ کا احتمال معلوم کیجیے، 'جس میں پانسوں پر اعداد کا حاصل جمع 4 ہے'۔

15۔ ایک پانسہ کے اچھالنے کے تجربہ پر غور کیجیے، اگر 3 کا ضعف آتا ہے، پانسہ کو دوبارہ پھینکیے اور اگر کوئی دوسرا نمبر آتا ہے، سکہ کو اچھالیے۔ اس وقوعہ کا مشروط احتمال معلوم کیجیے، 'جس میں سکہ ایک ٹیل دکھاتا ہے'، یہ دیا ہوا ہے کہ 'کم سے کم ایک پانسہ 3 دکھاتا ہے'۔

16 اور 17 ہر ایک سوالوں میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے

16۔ اگر $P(A)=\frac{1}{2}$، $P(B)=0$، تب $P(A/B)$ ہے

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$

(C) بیان نہیں کیا گیا ہے۔ (D) 1

17۔ اگر A اور B اس طرح کے وقوعات واقعات ہیں تا کہ $P(A|B)=P(B|A)$، تب

(A) $A \subset B$ لیکن $A \neq B$ (B) $A = B$

(C) $A \cap B = \phi$ (D) $P(A) = P(B)$

13.3 احتمال پر ضربی مسئلہ (Multiplication Theorem on Probability)

مان لیجیے کہ سیمپل فضا 'S' کے ساتھ E اور F دو وقوعات شامل ہیں۔ صاف طور پر، سیٹ $E \cap F$ اُس وقوعہ کو ظاہر کرتا ہے کہ دونوں E اور F واقع ہو چکے ہیں۔ دوسرے الفاظ میں وقوعہ $E \cap F$' E'اور F کو ایک کے بعد ایک وقوع میں آنے کو ظاہر کرتا ہے۔ وقوعہ $E \cap F$ کو E F کی طرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔

اکثر ہمیں وقوعہ E F کا احتمال معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر، دو پتوں (کارڈ) کو ایک کے بعد ایک کو نکالنے کے تجربہ میں، ہماری دلچسپی 'ایک بادشاہ یا ایک ملکہ' کے وقوعہ کا احتمال معلوم کرنے میں ہے۔ واقعہ E F کا احتمال

مشروط احتمال کا استعمال کر کے حاصل ہوتی ہے جیسا کہ مندرجہ ذیل حاصل ہوا ہے:

ہم جانتے ہیں کہ واقعہ E کا مشروط احتمال جبکہ دیا ہوا ہے کہ F واقع ہو چکا ہے P(E|F) سے ظاہر کی جاتی ہے اور اس طرح دی گئی ہے

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, P(F) \neq 0$$

اس نتیجہ سے، ہم لکھ سکتے ہیں

$$P(E \cap F) = P(F).\ P(E/F) \quad \text{(1) ...}$$

ساتھ ہی، ہم جانتے ہیں کہ

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}, P(E) \neq 0$$

یا

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \quad (\text{کیونکہ } E \cap F = F \cap E)$$

اس طرح،

$$P(E \cap F) = P(F).\ P(E/F) \quad \text{(2) ...}$$

(1) اور (2) کو ملانے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$P(E \cap F) = P(E).\ P(F/E)$$

$$= P(F).\ P(E/F) \text{ جبکہ } P(E) \neq 0 \text{ اور } P(F) \neq 0 \text{ ہے}$$

مندرجہ بالا نتیجہ احتمال کا ضربی اصول کہلاتا ہے۔

آیئے ایک مثال لیتے ہیں

مثال 8: ایک خاکدان میں 10 کالی اور 5 سفید گیندیں موجود ہیں۔ خاکدان سے بغیر واپس ڈالے ہوئے، ایک کے بعد ایک، دو گیندیں نکالی گئیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ دونوں نکالی گئیں گیندیں کالی ہیں؟

حل: مان لیجیے E اور F بالترتیب پہلی اور دوسری نکالی گئی کالی گیندوں کے وقوعات کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہمیں $P(E \cap F)$ یا (EF) معلوم کرنا ہے۔

اب

$$P(E) = P(\text{پہلی بار نکالنے میں کالی گیند}) = \frac{10}{15}$$

ساتھ ہی یہ دیا ہوا ہے کہ پہلی نکالی گئی گیند کالی ہے، یعنی، وقوعہ E واقع ہو گیا ہے، اب خاکدان میں 9 کالی اور پانچ سفید گیندیں باقی بچی ہیں۔ اس لیے، اس کا احتمال کہ نکالی گئی دوسری گیند کالی ہے، دیا گیا ہے کہ پہلی بار میں نکالی گئی گیند کالی ہے، کچھ نہیں ہے لیکن F کا مشروط احتمال ہے کہ E واقع ہو گیا ہے۔

یعنی، $P(F|E) = \dfrac{9}{14}$

احتمال کے ضربی اصول سے، ہمارے پاس ہے

$$P(E \cap F) = P(E).\ P(F/E)$$
$$= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$$

دو وقوعات سے زیادہ احتمال کے لیے ضربی اصول E، F اور G اگر سیمپل فضا کے تین واقعات ہے، ہمارے پاس ہے

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)\ P(F/E)\ P(G/(E \cap F)) = P(E)\ P(F/E)\ P(G/EF)$$

اسی طرح احتمال کے ضربی اصول کی توسیع چار یا اس سے زیادہ واقعات کے لیے بھی کی جاسکتی ہے۔

مندرجہ ذیل مثالیں تین واقعات سے زیادہ احتمال کے ضربی اصول کو واضح کرتی ہیں۔

مثال 9: تاش کے 52 پتوں کی ایک اچھی طرح پھینٹی ہوئی گڈی سے تین تاش بغیر واپس کیے گئے لگاتار نکالے گئے ہیں۔ اس کی کیا احتمال ہے کہ پہلے نکالے گئے دو پتے بادشاہ ہیں اور تیسرا پتا ایک اکّا ہے۔

حل: مان لیجیے K اس وقوعہ کو ظاہر کرتا ہے کہ جس میں نکالا گیا پتا ایک بادشاہ ہے اور A وہ وقوعہ ہے جس میں نکالا گیا پتا ایک اِکّا ہے۔ صاف طور پر، ہمیں P (KKA) معلوم کرنا ہے

اب $P(K) = \dfrac{4}{52}$

ساتھ ہی، P (P/K) دوسرے بادشاہ کا احتمال اس شرط کے ساتھ ہے کہ ایک بادشاہ پہلے ہی نکالا جا چکا ہے۔ اب، 51=(52-1) پتوں میں تین بادشاہ ہیں۔

اس لیے $P(K|K) = \dfrac{3}{51}$

آخر میں، P (A/KK) تیسرے نکالے گئے پتے کا احتمال ہے کہ یہ ایک اِکا ہے، اس شرط کے ساتھ کہ جو پتے پہلے نکالے جا چکے ہیں وہ بادشاہ ہیں۔ اب باقی بچے 50 پتوں میں 4 اِکّے موجود ہیں۔

اس لیے

احتمال کے ضربی اصول سے، ہمارے پاس ہے۔

$$P(K/KA) = P(K)\,P(K|K)\,P(A|KK)$$
$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{4}{50} = \frac{2}{5525}$$

13.4 غیر تابع وقوعات (Independent Events)

کھیلنے والے تاش کے 52 پتوں کی ایک گڈی سے ایک پتے کے نکالنے کے تجربہ پر غور کیجیے، جس میں بنیادی واقعات کو مساوی امکانی تصور کیا گیا ہے۔ اگر E اور F بالترتیب ان واقعات کو ظاہر کرتے ہیں جن میں نکالا گیا پتہ ایک حکم کا ہے، اور 'نکالا گیا پتہ ایک اِکا ہے، تب

$$P(F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \text{ اور } P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

ساتھ ہی E اور F وہ واقعہ ہے جس میں 'نکالا گیا پتہ حکم کا اِکا ہے' تا کہ

$$P(E \cap F) =$$

اس لیے

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{13}} = \frac{1}{4}$$

کیونکہ $P(F/E) = \frac{1}{4} = P(E)$ ہم کہہ سکتے ہیں کہ وقوعہ E کے واقع ہونے سے وقوعہ F کے واقع ہونے کے احتمال پر پر اثر نہیں پڑا ہے۔

ہمارے پاس ہے

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{13} = P(F)$$

دوبارہ، $P(F/E) = \frac{1}{13} = P(F)$ دکھاتا ہے کہ وقوعہ E کے واقع ہونا وقوعہ F کے واقع ہونے کی احتمالی پر اثر نہیں ڈالا ہے۔

اس طرح، E اور F دو ایسے وقوعات ہیں جن میں سے ایک کے واقع ہونے سے دوسرے کے واقع ہونے کا احتمال

پر اثر نہیں ہوا ہے۔

اس طرح کے واقعات کو غیر تابع وقوعات کہا جاتا ہے۔

تعریف 2: دو وقوعات E اور F کو غیر تابع کہا جاتا ہے، اگر

$P(F|E) = P(F)$ جبکہ $P(E) \neq 0$ ہو

اور $P(E|F) = P(E)$ جبکہ $P(F) \neq 0$ ہو

اس طرح، اس تعریف میں ہمیں $P(E) \neq 0$ اور $P(F) \neq 0$ رکھنے کی ضرورت ہے

اب، احتمال کے ضربی اصول سے، ہمارے پاس ہے

$$P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F|E) \quad \ldots (1)$$

اگر E اور F آزاد ہیں تب (1) ہو جاتی ہے

$$P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F) \quad \ldots (2)$$

اس طرح، (2) کا استعمال کرنے پر، دو واقعات کی آزادی مندرجہ ذیل طریقے سے بھی بیان کی جاتی ہے:

تعریف 3: مان لیجے E اور F دو واقعات ہیں جو کہ یکساں بلا منصوبہ تجربہ سے جڑے ہوئے ہیں، تب E اور F کو آزاد کہا جاتا ہے اگر

$$P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F)$$

ریمارک (Remark):

(i) دو واقعات E اور F تابع کہلاتے ہیں اگر وہ غیر تابع نہیں ہیں، یعنی اگر

$$P(E \cap F) \neq P(E) \,.\, P(F)$$

(ii) کئی بار غیر تابع وقوعات اور باہمی اخراجی وقوعات کے درمیان مغالطہ ہو جاتا ہے۔ رکن 'غیر تابع' وقوعات کے احتمال، کے طور پر بیان کیا جاتا ہے، جبکہ باہمی اخراجی وقوعات کی شکل میں بیان کیا گیا ہے۔ (سیمپل فضا کے ماتحت سیٹ)۔ اس کے علاوہ، باہمی اخراجی وقوعات کبھی بھی مشترک نتائج نہیں رکھتے، لیکن، غیر تابع وقوعات میں مشترک نتائج ہوتے ہیں۔ صاف طور پر 'غیر تابع' اور باہمی اخراجی کا یکساں مطلب نہیں ہوتا۔

دوسرے الفاظ میں دو غیر تابع وقوعات جن کے پیش آنے میں غیر صفر احتمالات ہوتے ہیں باہمی اخراجی نہیں ہو سکتے اور اس کے برعکس، یعنی، دو باہمی اخراجی واقعات جن کے پیش آنے والے غیر صفر احتمالات ہوتے ہیں، غیر تابع نہیں ہو سکتے۔

(iii) دو تجربات اس وقت غیر تابع ہوں گے اگر وقوعات E اور F کے ہر جوڑے کے لیے، جہاں E پہلے تجربہ کے ساتھ ملوث ہے اور F دوسرے تجربہ کے ساتھ ملوث ہے، وقوعات E اور F کی ہم وقت واقع ہونے کا احتمال جبکہ دو تجربات کو P (E) اور P (F) کے ماحاصل ضرب میں ترجیح دی جاتی ہے اور ان کا حساب دو تجربات کی بنیاد پر الگ الگ لگایا جاتا ہے۔ یعنی

$$P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F)$$

(iv) تین وقوعات A، B اور C کو باہمی غیر تابع کہا جاتا ہے، اگر

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \,.\, P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \,.\, P(C)$$

اور $$P(A \cap B \cap C) = P(A) \,.\, P(B) \,.\, P(C)$$

اگر مندرجہ بالا تین وقوعات میں سے ایک بھی صحیح نہیں ہے، ہم کہتے ہیں کہ وقوعات غیر تابع نہیں ہیں۔

مثال 10: ایک پانسہ اچھالا گیا ہے۔ اگر E وہ وقوعہ ہے 'جس میں ظاہر ہونے والا عدد 3 کا ضعف' ہے اور F وہ وقوعہ ہے جس میں ظاہر ہونے والا عدد جفت ہے، تب معلوم کیجیے کہ کیا E اور F غیر تابع ہیں؟

حل: ہم جانتے ہیں کہ سیمپل فضا $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ہے

اب $E = \{3, 6\}$، $F = \{2, 4, 6\}$ اور $E \cap F = \{6\}$

تب $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ، $P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ اور

صاف طور پر $P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F)$

اس لیے E اور F غیر تابع وقوعات ہیں۔

مثال 11: ایک سیدھا پانسہ دو بار اچھالا گیا ہے۔ مان لیجیے 'پہلے اچھال پر وقوعہ 'A' ایک طاق عدد' ہے، اور 'دوسرے اچھال پر وقوعہ 'B' طاق عدد' ہے۔ وقوعات A اور B کی غیر تابع ہونے کی جانچ کیجیے۔

حل: اگر تجربے کے تمام 36 بنیادی وقوعات کے مساوی امکانی ہونے پر غور کیا جائے، ہمارے پاس ہے

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \text{ اور } P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

ساتھ ہی $P(A \cap B) =$ P(دونوں بار اچھانے پر طاق عدد)

$$= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

اب $$P(A)\,P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

صاف طور پر $$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

اس طرح، A اور B غیر تابع واقعات ہیں

مثال 12: تین سکّے ہم وقت اچھالے گئے ہیں۔ وقوعہ E پر غور کیجیے جس میں تین ہیڈ یا تین ٹیل ہیں، F 'کم سے کم دو ہیڈ' اور G 'زیادہ سے زیادہ دو ہیڈ'، (E,F)، (E,G) اور (F,G) جوڑوں میں سے کون سا غیر تابع ہے؟ اور کون سا تابع ہے؟

حل: تجربہ کی سیمپل فضا اس طرح دی گئی ہے

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

صاف طور پر $$E = \{HHH, TTT\},\ F = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$$

اور $$G = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

ساتھ ہی $$E \cap F = \{HHH\},\ E \cap G = \{TTT\},\ F \cap G = \{HHT, HTH, THH\}$$

اس لیے $$P(E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},\ P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},\ P(G) = \frac{7}{8}$$

اور $$P(E \cap F) = \frac{1}{8},\ P(E \cap G) = \frac{1}{8},\ P(F \cap G) = \frac{3}{8}$$

ساتھ ہی $$P(E)\,.\,P(F) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8},\ P(E) \cdot P(G) = \frac{1}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{32}$$

اور $$P(F)\,.\,P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{16}$$

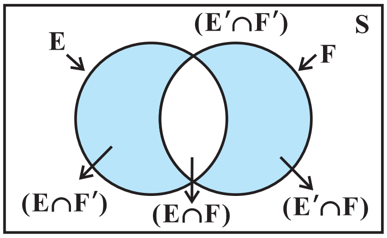
اس طرح $$P(E \cap F) = P(E)\,.\,P(F)$$

$$P(E \cap G) \neq P(E)\,.\,P(G)$$

اور $$P(F \cap G) \neq P(F)\,.\,P(G)$$

اس لیے، وقوعات (E اور F) آزاد ہیں، اور وقوعات (E اور G) اور (F اور G) ایک دوسرے پر مبنی ہیں۔

مثال 13: ثابت کیجیے کہ اگر E اور F غیر تابع وقوعات ہیں، تب وقوعات E اور F′ بھی غیر تابع ہیں۔



(شکل 13.3)

$$P(E \cap F) = P(F) . P(F) \quad \text{(1)......}$$

شکل 13.3 میں موجود وین تصویر سے، یہ صاف ہے کہ $E \cap F$ اور $E \cap F'$ باہمی اخراجی واقعات ہیں اور ساتھ ہی $E = (E\cap F) \cup (E \cap F')$ ہے۔

اس لیے $P(E) = P(E\cap F) + P(E\cap F')$

یا $P(E \cap F') = P(E) - P(E\cap F)$

$= P(E) - P(E) . P(F)$ (مساوات '1' سے)

$= P(E)(1-P(F))$

$= P(E) . P(F')$

اس لیے، E اور F' غیر تابع ہیں۔

> **نوٹ** بالکل اسی طریقہ سے، یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اگر واقعات E اور F غیر تابع ہیں، تب
>
> (a) E' اور F غیر تابع ہیں۔
>
> (b) E' اور F' غیر تابع ہیں۔

مثال 14: اگر A اور B دو غیر تابع وقوعات ہیں، تب کم سے کم A اور B میں سے کسی ایک کے واقع ہونے کا احتمال $1-P(A')\,P(B')$ سے دیا گیا ہے۔

حل: ہمارے پاس ہے۔

$P(A \cup B) = P$ (A اور B کا کم سے کم ایک)

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A) . (B)$

$= P(A) + P(B) [1- P(A)]$

$= P(A) + P(B) . P(A')$

$= 1- P(A') + P(B) . P(A')$

$= 1- P(A') [1 - P(B)$

$= 1- P(A') . P(B')$

مشق 13.2

1۔ اگر $P(A)=\frac{3}{5}$ اور $P(B)=\frac{1}{5}$ ہے، $P(A\cap B)$ معلوم کیجیے اگر A اور B غیر تابع وقوعات ہیں۔

2۔ کھیلنے والے تاش کے 52 پتوں کی ایک گڈی سے دو تاش بلا منصوبہ اور بغیر واپس رکھے ہوئے کھینچے گئے ہیں۔ اس کا احتمال دریافت کیجیے کہ دونوں کھینچے گئے تاش کالے ہیں۔

3۔ سنتروں کے ایک ڈبے کا معائنہ تین بلا منصوبہ چنے گئے سنتروں سے بغیر واپس رکھے کیا گیا ہے۔ اگر تینوں سنترے اچھے ہیں، ڈبہ کو بکری کے لیے منتخب کرلیا گیا ہے، ورنہ، اسے منسوخ کردیا گیا ہے۔ اس احتمال کو معلوم کیجیے جس میں ایک ڈبے میں 15 سنترے میں جن میں 12 اچھے اور 3 خراب ہیں، بکری کیے لیے منتخب کرلیا جائے گا۔

4۔ ایک صاف سکہ اور ایک صحیح پانسہ اُچھالا گیا۔ مان لیجیے A وہ وقوعہ ہے جس میں 'سکہ پر ہیڈ آتا ہے' اور B وہ وقوعہ ہے جس میں پانسہ پر '3' آتا ہے۔ جانچ کیجیے کہ کیا A اور B غیر تابع ہیں یا نہیں۔

5۔ ایک پانسہ جس پر 1، 2، 3 کے نشانات لال سے اور 4، 5، 6 کے ہرے سے لگائے گئے ہیں کو اُچھالا گیا۔ مان لیجیے A وہ وقوعہ ہے 'جس میں عدد جفت' ہے اور B وہ وقوعہ ہے جس میں عدد لال ہے۔ کیا A اور B غیر تابع ہیں؟

6۔ مان لیجیے E اور F وہ وقوعات ہیں جس میں $P(E)=\frac{3}{5}$، $P(F)=\frac{3}{5}$ اور $P(E\cap F)=\frac{1}{5}$ ہیں۔ کیا E اور F غیر تابع ہیں؟

7۔ واقعات A اور B اس طرح دیے گئے ہیں تاکہ $P(A)=\frac{1}{2}$، $P(A\cup B)=\frac{3}{5}$ اور $P(B)=P$ ہے۔ P معلوم کیجیے۔ اگر (i) باہمی اخراجی ہیں (ii) غیر تابع ہیں۔

8۔ مان لیجیے A اور B غیر تابع وقوعات ہیں جس میں $P(A)=0.3$ اور $P(B)=0.4$ ہیں معلوم کیجیے

(i) $P(A\cap B)$ (ii) $P(A\cup B)$

(iii) $P(A|B)$ (iv) $P(B|A)$

9۔ اگر A اور B دو وقوعات ہیں جب کہ $P(A)=\frac{1}{4}$، $P(B)=\frac{1}{2}$ اور $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$ ہیں۔ P معلوم کیجیے (نا تو A اور نہ ہی B)

10۔ واقعات A اور B اس طرح ہیں کہ $P(A)=\frac{1}{2}$، $P(B)=\frac{7}{12}$ اور P (نا تو A اور نہ ہی B) $=\frac{1}{4}$۔ بیان کیجیے کہ

کیا A اور B غیر تابع ہیں؟

11۔ دو غیر تابع وقوعات A اور B دیئے گئے ہیں تا کہ P (A) = 0.3، P (B) = 0.6 ہیں۔ معلوم کیجیے

(i) P (A اور B) (ii) P (A اور B نہیں)

(iii) P (A یا B) (iv) P (نہ تو A اور نہ ہی B)

12۔ ایک پانسہ کو تین بار اچھالا گیا ہے۔ کم سے کم ایک ناطق عدد حاصل کرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

13۔ ایک ڈبہ میں سے 2 گیندیں واپس رکھنے کے حساب سے بلا منصوبہ نکالی گئیں جس میں 10 کالی اور 8 لال گیندیں ہیں۔ احتمال معلوم کیجیے کہ،

(i) دونوں گیندیں لال ہیں۔

(ii) پہلی گیند کالی ہے اور دوسری لال ہے۔

(iii) ان میں سے ایک کالی ہے اور دوسری لال ہے۔

14۔ ایک مخصوص سوال کو A اور B کے ذریعے غیر تابع طریقے سے حل کرنے کا احتمال بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$ ہے۔ اگر دونوں سوال کو غیر تابع طور پر حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں، تو اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ

(i) مسئلہ حل ہو گیا ہے (ii) ان میں سے صرف ایک مسئلہ حل کرتا ہے۔

15۔ 52 پتوں کی اچھی طرح پھینٹی گئی ایک گڈی سے بلا منصوبہ ایک تاش نکالا گیا۔ مندرجہ ذیل کن کیسوں میں وقوعات E اور F غیر تابع ہیں۔

(i) E : 'نکالا گیا پتا ایک حکم کا پتہ ہے'

F : 'نکالا گیا پتہ ایک اِکّا ہے'

(ii) E : 'نکالا گیا پتا کالا ہے'

F : 'نکالا گیا پتا بادشاہ ہے'

(iii) E : 'نکالا گیا پتا ایک بادشاہ ہے یا ملکہ'

E : 'نکالا گیا پتا ایک بیگم ہے یا غلام ہے'

16۔ ایک ہاسٹل میں 50 فی صدی طلبا ہندی کا اخبار پڑھتے ہیں، 40 فی صدی انگریزی کا اخبار اور 20 فی صدی ہندی اور

انگریزی دونوں کا اخبار پڑھتے ہیں۔ایک طالبہ کو بلا منصوبہ چنا گیا ہے۔

(a) وہ احتمال معلوم کیجیے کہ نہ تو وہ ہندی کا اخبار پڑھتی ہے اور نہ ہی انگریزی کا۔

(b) اگر وہ ہندی کا اخبار پڑھتی ہے، تو اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ وہ انگریزی کا اخبار پڑھتی ہے۔

(c) اگر وہ انگریزی کا اخبار پڑھتی ہے، تو اس کے ہندی کا اخبار پڑھنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

سوال 17 اور 18 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

17۔ ہر ایک پانسہ پر ایک جفت مفرد عدد حاصل کرنے کا احتمال بتائیے، جبکہ پانسہ کے ایک جوڑے کو گھمایا گیا ہے

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{36}$

18۔ دو وقوعات A اور B غیر تابع ہوں گے، اگر

(A) A اور B باہمی اخراجی ہیں۔

(B) P (A'B') = [1-P (A)] [1- P (B)]

(C) P (A) = P (B)

(D) P (A) + P (B) = 1

13.5 بائیس کا مسئلہ (Bayes' Theorem)

غور کیجیے کہ I اور II دو تھیلے ہیں۔تھیلہ I میں 2 سفید اور 3 لال گیندیں ہیں اور تھیلہ II میں 4 سفید اور 5 لال گیندیں ہیں۔ایک تھیلے سے بلا منصوبہ ایک گیند نکالی گئی۔ہم کسی بھی تھیلے کے چننے کا احتمال معلوم کر سکتے ہیں (یعنی $\frac{1}{2}$) یا کسی خاص تھیلے سے (مان لیجیے تھیلہ I سے) ایک خاص رنگ کی گیند نکالنے کا احتمال (مان لیجیے سفید)۔دوسرے الفاظ میں، ہم یہ احتمال معلوم کر سکتے ہیں نکالی گئی گیند ایک خاص رنگ کی ہے، اگر ہمیں ہر تھیلا دیا ہوا ہو جس سے گیند نکالی گئی ہے۔لیکن کیا ہم یہ احتمال معلوم کر سکتے ہیں کہ گیند ایک خاص تھیلے سے نکالی گئی ہے (مان لیجیے تھیلہ II)، اگر نکالی گئی گیند کا رنگ دیا ہوا ہے؟ یہاں، ہمیں تھیلہ II کا معکوس احتمال معلوم کرنا ہے جو چننا ہے جبکہ ایک واقعہ پہلے سے ہی جاننے کے بعد پیش آیا ہے۔مشہور ریاضی داں جون بائیس (John Bayes') نے مشروط احتمال کا استعمال کر کے معکوس احتمال کو معلوم کرنے کے مسئلہ کو حل کیا تھا۔انھوں نے جو فارمولہ پیش کیا تھا وہ بائیس مسئلہ (Bayes' theorem) کے نام سے جانا جاتا ہے جو کہ 1763 میں ان کے مرنے کے بعد شائع ہوا تھا۔بائیس مسئلہ کو بیان کرنے اور ثابت کرنے سے پہلے ہمیں ایک تعریف اور کچھ ابتدائی نتائج لینے چاہئیں۔

13.5.1 ایک سیمپل فضا کا بٹوارہ (Partition of a sample space)

وقوعات $E_1, E_2, ..., E_n$ کا ایک سیٹ سیمپل فضا 'S' کو ظاہر کرتا ہے اگر

(a) $E_i \cap E_j = \phi, i \neq j, i, j = 1, 2, 3, ..., n$

(b) $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$

(c) $P(E_i) > 0$ for all $i = 1, 2, ..., n$

دوسرے الفاظ میں، وقوعات $E_1, E_2, ... E_n$ سیمپل فضا S کے بٹوارے کو ظاہر کرتے ہیں اگر وہ جوڑوں کے حساب حساب سے غیر مشترک ہیں، مکمل اور غیر صفر احتمالات رکھتے ہیں۔

مثال کے طور پر، ہم دیکھتے ہیں کہ کوئی بھی غیر خالی وقوعہ E اور اس کا تمتہ E^1 سیمپل فضا S کے بٹوارے کو بناتے ہیں کیونکہ کیونکہ وہ $E \cap E' = \phi$ اور $E \cup E' = S$ کو مطمئن کرتے ہیں۔

شکل 13.3 میں دین تصویر سے، کوئی بھی آسانی سے یہ مشاہدہ کرسکتا ہے کہ اگر E اور F کوئی بھی دو واقعات ایک سیمپل فضا S کے ساتھ ملوث ہیں، تب سیٹ $[E \cap F', E \cap F, E' \cap f, E' \cap F']$ سیمپل فضا 'S' کا ایک بٹوارہ ہے۔ یہ بھی دکھایا جاسکتا ہے کہ سیمپل فضا کا بٹوارہ اکیلا نہیں ہیں۔ سیمپل فضا کے بہت سے بٹوارے ہوسکتے ہیں۔

اب ہم ایک مسئلہ کو ثابت کریں گے جسے 'کل احتمال کا مسئلہ' کہا جاتا ہے۔

13.5.2 کل احتمال کا مسئلہ (Theorem of total probability)

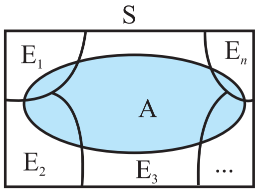
مان لیجیے $\{E_1, E_2,...,E_n\}$ سیمپل فضا S کا ایک بٹوارہ ہے، اور مان لیجیے کہ ہر وقوعہ $E_1, E_2,...,E_n$ واقع ہو کی غیر صفر احتمال رکھتا ہے۔ مان لیجیے کوئی بھی واقعہ A, S کے ساتھ منسلک ہے، تب

$$P(A) = P(E_1)\,P(A|E_1) + P(E_2)\,P(A|E_2) + ... + P(E_n)\,P(A|E_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(E_j)\,P(A|E_j)$$

ثبوت۔ دیا ہوا ہے کہ $E_1, E_2,...,E_n$ سیمپل فضا S کا ایک تقسیم کیا ہوا حصہ ہے (شکل 13.4) اس لیے

$$S = E_1 \cup E_2 \cup \; ... \cup E_n \qquad ...(1)$$



شکل 13.4

اور $E_i \cap E_j = \phi,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, ..., n$

اب، ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی واقعہ A کے لیے

$$A = A \cap S$$

$$= A \cap (E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n)$$

$$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup ... \cup A\ E_n)$$

ساتھ ہی $A \cap E_i$ اور $A \cap E_j$ بالترتیب E_i اور E_j کے ماتحت سیٹ ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ $i \neq j$ کے لیے E_i اور E_j مشترک ہیں، اس لیے، $A \cap E_i$ اور $A \cap E_j$ بھی تمام $i \neq j$ کے لیے $i \neq j,\ i, j = 1, 2, ..., n$ کے لیے مشترک ہیں۔

اس طرح، $P(A) = P[(A \cap E_i) \cup (A \cap E_2) \cup ... \cup (A \cap E_n)]$

$$= P(A \cap E_i) + P(A \cap E_2) + ... + P(A \cap E_n)$$

اب، احتمال کے ضربی اصول سے، ہمارے پاس ہے

$$P(A \cap E_i) = P(E_i)\, P(A|E_i) \text{ as } P(E_i) \neq 0\ \forall i = 1, 2, ..., n$$

اس لیے $P(A) = P(E_i)\, P(A|E_i) + P(E_2)\, P(A|E_2) + ... + P(E_n) P(A|E_n)$

یا $P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j)\, P(A|E_j)$

مثال 15: ایک آدمی نے ایک گھر بنانے کا کام لیا ہے۔ 0.65 احتمال ہے کہ ہڑتال ہوگی، 0.80 احتمال ہے کہ گھر بنانے کا کام وقت پر مکمل ہو جائے گا اگر کوئی ہڑتال نہیں ہوتی ہے، 0.32 احتمال ہے کہ گھر بنانے کا کام وقت پر مکمل ہو جائے گا اگر ہڑتال ہوتی ہے۔ وہ احتمال معلوم کیجیے کہ گھر بنانے کا کام وقت پر مکمل ہو جائے گا۔

حل: مان لیجیے کہ A وہ واقعہ ہے جس میں گھر بنانے کا کام وقت پر مکمل ہو جائے گا، اور B وہ واقعہ ہے جس میں ہڑتال ہوگی ہمیں P (A) معلوم کرنا ہے۔

ہمارے پاس ہے

$P(B) = 0.65$ (کوئی ہڑتال نہیں) $= P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.65 = 0.35$

$$P(A|B) = 0.32,\ P(A|B') = 0.80$$

کیونکہ واقعات B اور B′ سیمپل فضا کو تقسیم کرتے ہیں، اس لیے مکمل احتمال کے مسئلہ سے، ہمارے پاس ہے

$$P(A) = P(B)\,P(A|B) + P(B')\,P(A|B')$$

$$= 0.65 \times 0.32 + 0.35 \times 0.8$$

$$= 0.208 + 0.28 = 0.488$$

اس طرح، کام کے وقت پر مکمل ہونے کا احتمال 0.488 ہے۔

اب ہم بائیس مسئلہ کو بیان کریں گے اور اس کا ثبوت مکمل کریں گے۔

بائیس مسئلہ (Bayes' Theorem) اگر $E_1, E_2, ..., E_n$، n غیر خالی واقعات ہیں جو کہ سیمپل فضا کو تقسیم کرتے ہیں، یعنی $E_1, E_2, ..., E_n$ جوڑوں کے حساب سے غیر مشترک ہیں اور $S = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$ اور A کوئی بھی غیر صفر احتمال کا وقوعہ ہے، تب

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)}$$

کسی بھی $i = 1, 2, 3, ..., n$ کے لیے

ثبوت۔ مشروط احتمال کے ضابطے سے، ہم جانتے ہیں کہ

$$P(E_i|A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{P(A)}$$ (احتمالی کے ضربی اصول سے)

$$= \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)}$$ (مکمل احتمال کے مسئلہ کے نتیجے سے)

ریمارک (Remark): عام طور پر جب بائیس مسئلہ کو نافذ کیا جاتا ہے تو مندرجہ ذیل اصطلاحات کا استعمال کیا جاتا ہے۔

واقعات $E_1, E_2, ..., E_n$ کو مفروضہ (Hypotheses) کہا جاتا ہے۔

احتمال $P(E_i)$ کو مفروضہ E_i کا مقدم (Priori) احتمال کہا جاتا ہے۔

شرطیہ احتمال $P(E_i|A)$ کو مفروضہ E_i کو مؤخر (posteriori) احتمال کہا جاتا ہے۔

بائیس مسئلہ کو ''وجوہات'' کے لیے احتمال کا ضابطہ بھی کہا جاتا ہے۔ کیونکہ E_i سیمپل فضا کو تقسیم کرتے ہیں، ایک اور صرف

ایک وقوعہ E_i وجود میں آتے ہیں (یعنی، وقوعات E_i میں سے صرف ایک وقوعہ واقع ہو اس لیے، مندرجہ بالا فارمولہ ایک مخصوص E_i کا احتمال دیتا ہے۔ (یعنی، ایک ''وجہ'')، جب کہ دیا ہوا ہے کہ وقوعہ A واقع ہو گیا ہے۔

بائیس کے مسئلہ کا استعمال بہت سے حالات میں ہوتا ہے، ان میں کچھ مندرجہ ذیل مثالوں میں سمجھائے گئے ہیں۔

مثال 16: تھیلہ نمبر I میں 3 لال اور 4 کالی گیندیں ہیں جبکہ دوسرے تھیلے II میں 5 لال اور 6 کالی گیندیں ہیں۔ ایک تھیلے میں سے ایک گیند بلا منصوبہ نکالی گئی اور پایا گیا ہے کہ یہ لال ہے۔ اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ یہ تھیلے نمبر II سے نکالی گئی ہے۔

حل: مان لیجیے E_i وہ وقوعہ ہے جس میں تھیلہ نمبر I چنا گیا ہے، E_2 وہ وقوعہ ہے جس میں تھیلہ II چنا گیا ہے اور A وہ وقوعہ ہے جس میں لال گیند نکالی گئی ہے۔

تب
$$P(E_i) = P(E_2) = \frac{1}{2}$$

ساتھ ہی
$$P(A|E_i) = P(\text{تھیلہ I سے ایک لال گیند نکالنا}) = \frac{3}{7}$$

اور
$$P(A|E_2) = P(\text{تھیلہ II سے ایک لال گیند نکالنا}) = \frac{5}{11}$$

اب تھیلہ II سے گیند نکالنے کی احتمالی، جبکہ یہ دیا ہوا ہے کہ یہ لال ہے، $P(E_2|A)$ ہے

بائیس مسئلہ کا استعمال کر کے، ہمارے پاس ہے

$$P(E_2|A) = \frac{P(E_2)\,P(A|E_2)}{P(E_1)\,P(A|E_1) + P(E_2)\,P(A|E_2)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}} = \frac{35}{68}$$

مثال 17: تین ایک جیسے باکس I، II اور III دیے گئے ہیں، ہر ایک میں دو سکّے ہیں۔ باکس I میں، دونوں سکے سونے کے ہیں، باکس II میں، دونوں سکے چاندی کے ہیں، اور باکس III میں، ایک سکہ سونے کا اور ایک سکہ چاندی کا ہے۔ ایک انسان ایک باکس کا انتخاب کرتا ہے اور بلا منصوبہ ایک سکہ نکالتا ہے۔ اگر سکہ سونے کا ہے، اس کا کیا احتمال ہے کہ باکس میں دوسرا سکہ بھی سونے کا ہے؟

حل: مان لیجیے کہ باکس I، II اور III کے انتخاب کرنے کے وقوعات بالترتیب E_1، E_2 اور E_3 ہیں۔

تب
$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) =$$

ساتھ ہی، یہ مان لیجیے کہ 'نکالے گئے سونے کے سکے' کا وقوعہ A ہے

تب $P(A|E_1) = P$ (بیگ I سے سونے کا ایک سکّہ) $= \frac{2}{2} = 1$

$P(A|E_2) = P$ (بیگ II سے سونے کا ایک سکّہ) $= 0$

$P(A|E_3) = P$ (بیگ III سے سونے کا ایک سکّہ) $= \frac{1}{2}$

اب، باکس میں دوسرا سکّہ سونے کا ہونے کا احتمال

= باکس I سے نکالے گئے سونے کے سکے کا احتمال

$= P(E_1|A)$

بائیس مسئلہ سے، ہم جانتے ہیں کہ

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)P(A|E_1)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

مثال 18: مان لیجیے کہ ایک HIV ٹیسٹ پر خاص طور سے بھروسہ کیا گیا ہے جیسا کہ مندرجہ ذیل میں ہے:
جتنے لوگوں کو HIV ہے، ان میں سے 90 فی صد ٹیسٹ بیماری کا پتہ لگا لیتے ہیں، لیکن 10 فی صد پتہ نہیں لگا سکتے۔ جو لوگ HIV سے آزاد ہیں، 99 فی صد ٹیسٹ بتاتے ہیں کہ HIV منفی ive– ہے لیکن 1 فی صد بتاتے ہیں کہ HIV (+ive) مثبت ہے۔ ایک بہت بڑی آبادی سے جن میں صرف 0.1 فی صدی لوگوں کو HIV ہے، ایک انسان کو بغیر منصوبہ کے چنا گیا ہے، HIV ٹیسٹ کرنے کے لیے، اور اس کی پیتھولوجی رپورٹ کر ذریعے آدمی/عورت کے لیے کہ HIV مثبت +ive ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ اصلیت میں اس انسان کو HIV ہے؟

حل: مان لیجیے E اس وقوعہ کو ظاہر کرتا ہے کہ جس میں اس انسان کو حقیقت میں HIV ہے اور A وہ وقوعہ ہے کہ انسان کا HIV ٹیسٹ +ive آیا ہے۔ ہمیں P (E|A) معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔ ساتھ ہی E′ اس وقوعہ کو ظاہر کرتا ہے کہ اصلیت میں جو انسان چنا گیا ہے اسے HIV نہیں ہے۔

صاف طور پر، آبادی میں تمام انسانوں کی سیمپل فضا کا (E,E′) ایک بٹوارہ ہے، ہمیں دیا گیا ہے کہ

$$P(E) = 0.1\% = \frac{0.1}{100} = 0.001$$

$$P(E') = 1 - P(E) = 0.999$$

$P(A|E) = P$ (جس انسان کا ہے، دیا گیا ہے کہ اس آدمی/عورت کو اصلیت میں HIV ہے۔

$$= 90\% = \frac{90}{100} = 0.9$$

$P = P(A|E')$ (جس انسان کا HIV ٹیسٹ +ive آیا ہے، دیا گیا ہے کہ اصلیت میں اس آدمی/عورت کو HIV نہیں ہے)

$$= 1\% = \frac{1}{100} = 0.01$$

اب، اس بائیس مسئلہ ہے

$$P(E|A) = \frac{P(E)\,P(A|E)}{P(E)\,P(A|E) + P(E')\,P(A|E')}$$

$$= \frac{0.001 \times 0.9}{0.001 \times 0.9 + 0.999 \times 0.01} = \frac{90}{1089}$$

$= 0.083$ (لگ بھگ)

اس طرح، ایک انسان کا احتمال جو کہ بلامنصوبہ چنا گیا ہے کہ اسے اصلیت میں اسے HIV ہے، جب کہ دیا گیا ہے کہ آدمی/عورت کی HIV + ive، 0.083 ہے۔

مثال 19: ایک کمپنی جو بولٹ تیار کرتی ہے، میں مشین A، B اور C بالترتیب 25%، 35% اور 40% بولٹ تیار کرتی ہیں۔ ان کی نکاسی میں بالترتیب 5، 4 اور 2 فی صد بولٹ خراب ہیں۔ تیار کیے گئے بولٹوں سے بلامنصوبہ ایک بولٹ نکالا گیا اور یہ پایا گیا کہ یہ بولٹ خراب ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ یہ بولٹ مشین B کے ذریعے تیار کیا گیا ہے؟

حل: مان لیجیے کہ واقعات B_1، B_2، B_3 مندرجہ ذیل ہیں:

B_1 : مشین A کے ذریعے تیار کیا گیا بولٹ

B_2 : مشین B کے ذریعے تیار کیا گیا بولٹ

B_3 : مشین C کے ذریعے تیار کیا گیا بولٹ